

10. Problemi.

10.1. CALCOLO DI GENERE. Determinare, sia tramite analisi dei posti e formule di Plücker, sia tramite opportune mappe di rivestimento ramificato della retta proiettiva (per esempio le proiezioni sugli assi coordinati), sia studiando i differenziali (eventualmente regolari) il genere delle seguenti curve piane:

- (10.1.1) $X_1^n + X_2^n = X_0^n$ (Fermat)
- (10.1.2) $(X + Y)(X - Y) = X^4 + Y^4$
- (10.1.3) $Y^2 = X^3 + Y^4$
- (10.1.4) $Y^2 = X^4 + Y^3$
- (10.1.5) $Y^2 = X^4 + XY^3$
- (10.1.6) $Y^2 = X^4 + Y^4$
- (10.1.7) $(Y - X^2)^2 = Y^3$
- (10.1.8) $(Y - X^2)^2 = XY^3$
- (10.1.9) $XY(X - Y) = X^4 + Y^4$
- (10.1.10) $Y^2X = X^4 + Y^4$
- (10.1.11) $Y^3 = X^4$
- (10.1.12) $(X - 1)(X + Y)(X - Y) = X^4 + Y^4$
- (10.1.13) $(X + Y)(X - Y) = X^4$
- (10.1.14) $(X + Y)(X - Y) = X^5 + Y^5$
- (10.1.15) $X^2 = Y^5$
- (10.1.16) $(Y - X^2)^2 = Y^5$
- (10.1.17) $(Y - X^2)^2 = Y^5 + XY^4$
- (10.1.18) $XY(X - Y) = Y^5 + X^5$
- (10.1.19) $X^2Y = Y^5 + X^5$
- (10.1.20) $X^3 = Y^5$
- (10.1.21) $X(Y - X^2)^2 = Y^4$
- (10.1.22) $X(Y - X^2)^2 = Y^5$
- (10.1.23) $X^4 = Y^5$
- (10.1.24) $X^3Y = X^5 + Y^5$
- (10.1.25) $X^2Y^2 = X^5 + Y^5$
- (10.1.26) $XY(X + 2Y)(X - 2Y) = Y^5 + X^5$
- (10.1.27) $X^2 + Y^3 = X^5$
- (10.1.28) $(X + Y)(X - Y) = X^5$

10.2. ANCORA GEOMETRIA DELLE CURVE ELLITTICHE.

- (1) Studiare i casi di coniche tritangenti alle cubiche, cioè fissata una curva ellittica \mathcal{E} , studiare i divisori del tipo $2P_1 + 2P_2 + 2P_3$ che siano divisori di intersezione con una conica.
- (2) Studiare i casi di coniche “puramente bitangenti” alle cubiche, cioè fissata una curva ellittica \mathcal{E} , studiare i divisori del tipo $3P_1 + 3P_2$ che siano divisori di intersezione con una conica. Anche i divisori del tipo $2P_1 + 4P_2$?
- (3) Generalizzare i casi precedenti, per quanto possibile.

10.3. TORSIONE SULLE CURVE ELLITTICHE. Che cosa si può dire dei punti di torsione di ordini 5, 7, 8, 9 su una curva ellittica? Generalizzare per quanto possibile.

10.4. Studiare i punti fissi degli automorfismi delle curve ellittiche, discutendo i casi generale, armonico, equianarmonico.

10.5. ??? Per curve piane lisce dello stesso grado, è vero che essere proiettivamente o birazionalmente equivalenti sono proprietà equivalenti?