(significa che vi sono molte equazioni polinomiali per $\varphi(\mathscr{C})$).

9.4.2. Osservazioni.

(1) Il nucleo di ogni applicazione R_k ha una parte ovvia che viene dal nucle dell'applicazione precedente: se $F_1 \ldots, F_s \in \ker(R_k)$, allora ogni combinazione del tipo $\sum_i l_i F_i$ con $\deg l_i = 1$ appartiene a $\ker(R_{k+1})$.

(2) È chiaro a priori che per $k = 1$ si ha che R_1 è isomorfismo, e il suo nucleo è zero ($\varphi(\mathscr{C})$ non è degenere, cioè non è contenuta in alcun iperpiano).

(3) È utile notare che se $\deg(D) \geqslant g$, allora si ha che

$$\deg(kD) = k\deg(D) \geqslant kg \geqslant \begin{cases} 2g-1 & \text{se } k \geqslant 2 \\ 2g+1 & \text{se } k \geqslant 3 \end{cases}$$

(permette di usare formule semplificate per Riemann-Roch).

(4) Infine, applichiamo i discorsi precedenti al caso del sistema canonico: usiamo $\mathscr{C}$ curva proiettiva di genere $g \geqslant 3$, $\deg(\kappa) = 2g-2$, $\ell(\kappa) = g$. Risulta allora che

$$\dim_K(\ker(R_k)) \geqslant \binom{k+g-1}{k} - (k(2g-2)+1-g) = \binom{k+g-1}{k} - 2(g-1)k + (g-1)$$

(per k sufficientemente grande).

9.5. curve proiettive di genere 3. Nel caso di curve proiettive $\mathscr{C}$ di genere $g = 3$, supponiamo non iperellittiche e quindi $k : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^2(K)$ immersione, abbiamo che $\dim_K(\ker(R_k)) \geqslant \binom{k+2}{k} - 4k + 2$; esplicitamente:

k	$\dim_K(\ker(R_k))$
2	$6-8+2=0$
3	$10-12+2=0$
4	$15-16+2=1$

e si trova (almeno) una equazione di quarto grado (trattandosi di curve piane non si può avere più di una equazione). Quindi *le curve proiettive di genere* 3 *sono di due tipi: o iperellittiche (e allora sono birazionali a curve proiettive piane iperellittiche di grado* 8*), oppure birazionali a quartiche piane lisce.*

9.6. curve proiettive di genere 4. Nel caso di curve proiettive $\mathscr{C}$ di genere $g = 4$, supponiamo non iperellittiche e quindi $k : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^3(K)$ immersione, abbiamo che $\dim_K(\ker(R_k)) \geqslant \binom{k+3}{k} - 6k + 3$; esplicitamente:

k	$\dim_K(\ker(R_k))$
2	$10-12+3=1$
3	$20-18+3=5$

e si trova (almeno) una equazione di secondo grado e una indipendente di terzo grado. Quindi *le curve proiettive di genere* 4 *sono di due tipi: o iperellittiche (e allora sono birazionali a curve proiettive piane iperellittiche di grado* 10*), oppure birazionali a curve lisce intersezione di una quadrica e di una cubica in* $\mathbb{P}^3(K)$.

9.7. curve proiettive di genere 5. Le curve proiettive di genere 5 si dividono in iperellittiche (birazionali a curve piane iperellittiche di grado 12), e non iperellittiche che sono di due tipi (a meno di birazionalità): rivestimenti ramificati tripli della sfera di Riemann (curve trigonali) e intersezioni (complete) lisce di quadriche in $\mathbb{P}^4(K)$.

9.8. curve proiettive di genere 6. Le curve proiettive di genere 6 si dividono in iperellittiche (birazionali a curve piane iperellittiche di grado 14), e non iperellittiche che sono di tre tipi (a meno di birazionalità): rivestimenti ramificati tripli della sfera di Riemann (curve trigonali), intersezioni (complete) lisce di quadriche in $\mathbb{P}^5(K)$, e quintiche piane lisce.

9.9. curve proiettive di genere $g \geqslant 7$. Le curve proiettive di genere g almeno 7 si dividono in iperellittiche (birazionali a curve piane iperellittiche di grado $2g+2$), e non iperellittiche che sono di due tipi: rivestimenti ramificati tripli della sfera di Riemann (curve trigonali) e curve di grado $2g-2$ intersezioni lisce di quadriche (?) in $\mathbb{P}^{g-1}(K)$.