ciclico d'ordine 4, fuori dal sottogruppo delle traslazioni).
A titolo di problema, si può controllare che: $I^2 = S$, $I^3 = I^{-1} = IS = SI$, $I^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Inoltre abbiamo $IT_P = T_{IP}I$, e quindi $IT_PI = T_{IP}S$. Risulta che $(IT_P)^4 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}} = (T_PI)^4$, però si faccia attenzione a che S, $(IT_P)^2$, $(T_PI)^2$ sono tutti diversi tra loro!

(3) le quattro tangenti hanno 2 valori distinti del birapporto, necessariamente $\pm\omega$ con ω soddifacente $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (dunque $\omega^3 = 1$, e $\omega \neq 1$): in questo caso la curva ellittica viene detta equianarmonica, e in forma canonica può essere $Y^2 = X^3 - 1$. Nel caso equianarmonico π può essere l'identità o potenze di un tre-ciclo; si vede subito che la mappa Ω definita da $\Omega\binom{x}{y} = \binom{\omega x}{-y}$ è un automorfismo (anche di gruppo, usando le formule esplicite), e $\Omega^3 = S$. Dunque nel caso equianarmonico gli automorfimi di $\mathscr{E}$ sono generati da traslazioni e da Ω (e vi è un sottogruppo ciclico d'ordine 6, fuori dal sottogruppo delle traslazioni).
A titolo di problema, si può controllare che: $\Omega^3 = S$, $\Omega^4 = \Omega^{-2} = \Omega S = S\Omega$, $\Omega^5 = \Omega^{-1} = S\Omega^2 = \Omega^2 S$, $\Omega^6 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Inoltre abbiamo $\Omega T_P = T_{\Omega P}\Omega$, e quindi $\Omega T_P \Omega^2 = T_{\Omega P}S$. Risulta che $(\Omega T_P)^3 = S = (T_P\Omega)^3$, da cui $(\Omega T_P)^6 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}} = (T_P\Omega)^6$, però si faccia attenzione a che Ω^2, $(\Omega T_P)^2$, $(T_P\Omega)^2$ sono tutti diversi tra loro!

9.3. Curve proiettive di genere 2. *Ogni curva proiettiva $\mathscr{C}$ di genere 2, è iperellittica, e quindi è birazionale ad una curva proiettiva piana iperellittica di grado 6.*

Qui potremmo tentare di usare divisori D di grado $2g - 1 = 3$, che darebbero chiaramente una mappa $\mathscr{C} \to \mathbb{P}^1(K)$ (perché usando Riemann-Roch si ha $\ell(D) = 2$), ma si tratterebbe di mappe di grado 3, e non 2.

Usando invece il sistema associato ad un divisore canonico $\kappa = \mathrm{div}(\omega)$, abbiamo $\deg(\kappa) = 2g-2 = 2$ e $\ell(K) = g = 2$, che dunque definisce una mappa $\mathscr{C} \to \mathbb{P}^1(K)$ non costante di grado 2; quindi si tratta di una curva iperellittica, che sappiamo essere birazionale ad curva proiettiva piana iperellittica (di grado 6).

9.4. Equazioni algebriche. Per salire ancora con il genere, bisogna disporre di qualche strumento generale che permetta di trovare equazioni algebriche soddisfatte dalle immagini di una curva proiettiva tramite immersioni proiettive definite da divisori. Si tratta di generalizzare il procedimento che abbiamo usato per le curve di genere 1.

9.4.1. Consideriamo una curva proiettiva $\mathscr{C}$, un suo divisore molto ampio D di grado d e dimensione n, e l'immersione $\varphi : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^n(K)$ definita da D.

(1) Osserviamo che $\dim_K K[X_0, \ldots, X_n]_k = \binom{n+k}{k}$ (dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado k in $n+1$ variabili), e quindi tale dimensione è $O(k^n/n!)$. È in questi spazi che bisogna cercare le possibili equazioni per $\varphi(\mathscr{C})$.

(2) Considerando $\varphi : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^n(K)$, per ogni $F \in K[\underline{X}]_k$ possiamo definire il divisore in $\mathscr{C}$ di F similmente a quanto fatto per gli iperpiani:

$$\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(F) = \mathrm{div}\left(\frac{F}{\Phi} \circ \varphi\right)$$

usando $\Phi \in K[\underline{X}]_k$ (per esempio k volte un iperpiano) che non si annulli nei punti di $\varphi(\mathscr{C})$ in cui si annulla F. Ora è facile vedere che $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(F) \sim kD$ (equivalenza lineare), e quindi $\frac{\Phi}{F} \circ \varphi$ è funzione razionale su $\mathscr{C}$ con poli limitati da kD.
Abbiamo quindi una applicazione lineare

$$R_k : K[\underline{X}]_k \longrightarrow \mathscr{L}(kD) \qquad \Phi \mapsto \frac{\Phi}{F} \circ \varphi$$

il cui nucleo è descritto dai polinomi che si annullano identicamente su $\mathscr{C}$, quindi equazioni per $\varphi(\mathscr{C})$.

(3) Applicando Riemann-Roch, abbiamo che

$$\begin{aligned} \ell(kD) &= \deg(kD) + 1 - g + \ell(\kappa - kD) \\ &= \deg(kD) + 1 - g \qquad \text{per } k \gg 0 \\ &= O(k \deg(D)) \ll O(k^n/n!) \qquad \text{per } k \gg 0\ . \end{aligned}$$

Dunque, risulta che

$$\dim_K \ker(R_k) \geqslant \binom{n+k}{k} - (\deg(kD) + 1 - g) \gg 0 \qquad \text{per } k \gg 0$$