(6) Punti di sei torsione: sono i punti Z per cui $6Z = O$, mentre si chiamano punti sestici di $\mathscr{E}$ quelli per cui esiste una conica non degenere $\mathscr{C}$ con intersezione $6Z$ con $\mathscr{E}$. Naturalmente, i punti sestici sono di 6-torsione, esattamente quelli che non sono (anche) di 3-torsione, cioè non sono flessi (nel qual caso le coniche con l'intersezione sestica sono le tangenti contate due volte, dunque degeneri).
I punti sestici Y sono quelli per cui $2Y$ è un flesso, e dunque sono le intersezioni residue delle tangenti dai flessi: ogni flesso ha tre tali punti, e quindi vi sono 27 punti sestici, e 36 punti di 6-torsione. Fare una tabellina per averli tutti (basta sommare flessi con punti di 2-torsione...).

9.2.6. Birapporti di tangenti e classificazione delle curve ellittiche. *Per ogni punto P di $\mathscr{E}$, le quattro tangenti ad $\mathscr{E}$ da P (tolta la doppia occorrenza della tangente in P) formano quaterne con lo stesso birapporto, a meno di permutazioni. Tale invariante è dunque associato alla curva ellittica, e classifica tali curve a meno di birazionalità (e anche di proiettività).*

Basta chiaramente confrontare il punto P con il punto O. Abbiamo chiaramente una proiettività $O^* \to P_0^*$ definita mandando $O \vee O_i$ in $P_0 \vee O_i$ che manda le quattro tangenti di O nelle rette
$P_0 \vee O$ (contenente i punti $P_0, O, \ominus P_0$),
$P_0 \vee O_1$ (contenente i punti $P_0, O_1, \ominus P_1$),
$P_0 \vee O_2$ (contenente i punti $P_0, O_1, \ominus P_2$),
$P_0 \vee O_3$ (contenente i punti $P_0, O_1, \ominus P_3$).
Inoltre la mappa $P_0^* \to P^*$ definita mandando $P_0 \vee O_i$ in $P \vee (P_0 \oplus O_i)$ coincide chiaramente con quella definita mandando $P_0 \vee \ominus P_i$ in $P \vee P_i$, che è chiaramnete una proiettività visto che $X \mapsto \ominus X$ è mappa lineare nelle coordinate in forma canonica di $\mathscr{E}$ (simmetria rispetto all'ascissa). La composizione delle due mappe è quindi una proiettività, e si vede subito che manda le quattro tangenti da O in quelle da P; quindi il birapporto dev'essere conservato, a meno di permutazioni. Che si tratti di un invariante di classificazione, l'avevamo essenzialmente già visto.

9.2.7. Automorfismi delle curve ellittiche. Certamente, tra gli automorfismi delle curve ellittiche troviamo tutte le traslazioni: per ogni punto P di $\mathscr{E}$ la mappa T_P definita da $T_P(X) = X \oplus P$ è una trasformazione birazionale con inversa $T_P^{-1} = T_{\ominus P}$. Si tratta chiaramente di un sottogruppo commutativo degli automorfismi di $\mathscr{E}$; inoltre $T_O = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$, e se $P \neq O$ allora T_P non ha punti uniti.

In secondo luogo, la simmetria della struttura di gruppo di Poincaré, cioè la mappa S definita da $S(X) = \ominus X$ è chiaramente un automorfismo, autoinverso ($S^2 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$) avente quali punti fissi i quattro punti di 2-torsione. Nelle forme canoniche si $\mathscr{E}$ si tratta della mappa $S\binom{x}{y} = \binom{x}{-y}$. Geometricamente si tratta di "scambiare tra loro le coppie di punti di $\mathscr{E}$ allineate con O": il fascio di rette per O determina un sistema lineare di intersezioni di grado due, e in ogni divisore si permutano i due punti. Similmente, la composizione $T_P S$ fissa P e scambia tra loro i punti delle coppie allineate con P, cioè scambia tra loro i punti dei divisori di grado 2 del sistema lineare di $\mathscr{E}$ determinato da P^*.

Va notato ovviamente che la simmetria non commuta con le traslazioni: $ST_P \neq T_P S$; risulta invece $ST_P = T_{\ominus P}S = T_{SP}S$, cioè $T_P S T_P = S$, ovvero $(T_P S)^2 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}} = (ST_P)^2$. Comunque il gruppo degli automorfismi non sarà mai commutativo, visto che per ogni curva ellittica contiene almeno traslazioni e simmetria.

Per procedere, consideriamo un automorfismo $T : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ tale che $T(O) = O$ (altrimenti basta comporre con una traslazione per trovarci in questo caso, studiare il quale è dunque sufficiente). Di conseguenza T induce un automorfismo del sistema lineare delle sezioni con rette per O (sistema di dimensione 1 e grado 2), che necessariamente permuta i punti doppi di quel sistema (punti di 2-torsione). Quindi T induce una mappa birazionale e quindi una proiettività $\pi : O^* \to O^*$ che permuta tra loro le quattro tangenti a $\mathscr{E}$ da O. Vi sono allora tre casi da distinguere:

(1) le quattro tangenti hanno 6 valori distinti del birapporto (per permutazioni); allora necessariamente π è l'identità, e T può essere solo $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ oppure S. Questo è il caso generico, e quindi in generale gli automorfimi di $\mathscr{E}$ sono solo quelli elencati in precedenza: generati da traslazioni e simmetria (e vi è un sottogruppo ciclico d'ordine 2, fuori dal sottogruppo delle traslazioni).
(2) le quattro tangenti hanno 3 valori distinti del birapporto, necessariamente $-1, 2, \frac{1}{2}$: in questo caso la curva ellittica viene detta armonica, e in forma canonica può essere $Y^2 = X(X^2 - 1)$. Nel caso armonico π può essere l'identità o uno scambio; si vede subito che la mappa I definita da $I\binom{x}{y} = \binom{-x}{iy}$ è un automorfismo (anche di gruppo, usando le formule esplicite), e $I^2 = S$. Dunque nel caso armonico gli automorfimi di $\mathscr{E}$ sono generati da traslazioni e da I (e vi è un sottogruppo