se non è proiezione di una curva $\mathscr{C}'$ dello stesso ordine di $\mathscr{C}$ e il cui span lineare abbia dimensione maggiore di r.

Vale che: *una curva è normale se e solo se il suo sistema lineare di sezioni iperpiane è completo.*

8.10. FORMA NORMALE DELLE TRASFORMAZIONI PROIETTIVE. In certi casi è possibile descrivere le trasformazioni proiettive di una curva come composizione canonica di una immersione normale o canonica e di una proiezione di centro opportuno. Per esempio:

8.10.1. GENERE 0. Se L è sistema lineare di una curva $\mathscr{C}$ di genere nullo, allora L è un sottospazio proiettivo di un sistema completo della forma nP dove P è un punto di $\mathscr{C}$ e n è il grado del sistema (tutti i divisori dello stesso grado sono equivalenti tra loro). Allora la trasformazione proiettiva φ_L è la composizione della immersione normale $\varphi_{|nP|}$ (mappa $\mathscr{C} \to \mathbb{P}^n$) e di una proiezione $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^r$ ($r = \dim L$): basta scegliere una base del sottospazio vettoriale di $\mathscr{L}(nP)$ corrispondente ad L, e completarla ad una base di $\mathscr{L}(nP)$.

8.10.2. GENERE 1. Se L è sistema lineare di una curva $\mathscr{C}$ di genere 1, allora L è un sottospazio proiettivo di un sistema completo della forma nP dove P è un punto di $\mathscr{C}$ e n è il grado del sistema (basta scegiere P in modo che un divisore di L abbia somma nella legge di gruppo di Poincaré pari a nP, come punto). Allora la trasformazione proiettiva φ_L è la composizione della immersione normale $\varphi_{|nP|}$ (mappa $\mathscr{C} \to \mathbb{P}^{n-1}$) e di una proiezione $\mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{P}^r$ ($r = \dim L$).

8.10.3. GENERE MAGGIORE? Per curve di genere maggiore di 1, si può mostrare che ogni trasformazione razionale $\mathscr{C} \to \mathbb{P}^r$ di grado $n < g + r$ ($g = g(\mathscr{C})$ il genere della curva) si fattorizza tramite una proiezione preceduta dalla mappa canonica $\varphi_\kappa : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^{g-1}$.

9. Classificazione birazionale delle curve.

Siamo ormai in grado di usare il teorema di Riemann-Roch per classificare birazionalmente le curve proiettive per generi piccoli, e anche di dimostrare in generale che ogni curva proiettiva è birazionalmente equivalente a una curva proiettiva liscia in qualche spazio proiettivo (e anzi, come già sappiamo, in uno spazio affine se rinunciamo ad un solo punto). *Il punto centrale è che la conoscenza delle funzioni razionali sulla curva permette di avere informazioni sulla curva stessa.*

9.1. CURVE PROIETTIVE DI GENERE 0. *Se $\mathscr{C}$ è curva proiettiva, esiste $P \in \mathscr{C}$ tale che $\dim_K \mathscr{L}(P) > 1$ se e solo se $\mathscr{C}$ è di genere 0, e in tal caso $\mathscr{C}$ è birazionale alla retta proiettiva $\mathbb{P}^1(K)$, e la condizione vale per ogni punto.*

Infatti, questo equivale all'esistenza di una funzione razionale non costante $f : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^1(K)$ con unico polo in P, quindi rivestimento con un foglio, e dunque una mappa birazionale.

9.1.1. Di conseguenza possiamo dire che il genere di $\mathscr{C}$ è maggiore di 0 se e solo se per ogni $P \in \mathscr{C}$ si ha $\ell(P) = 1$. E viceversa, il genere di $\mathscr{C}$ è 0 (e dunque $\mathscr{C}$ è birazionale a $\mathbb{P}^1(K)$) se e solo se per un (e allora per ogni) $P \in \mathscr{C}$ si ha $\ell(P) = 2$.

9.1.2. La razionalità di una curva è equivalente a ciascuna delle seguenti condizioni:

(1) ogni divisore di grado nullo è principale;
(2) ogni divisore positivo è luogo dei poli (o degli zeri) di una funzione razionale;
(3) esistono sistemi completi di divisori di grado pari alla dimensione (proiettiva).

9.1.3. AUTOMORFISMI DI CURVE RAZIONALI. È facile vedere che le trasformazioni di $\mathscr{P}^1(K)$ in sé (corrispondono alle trasformazioni razionali di $\mathscr{A}^1(K)$ in sé) che siano biiettive (cioè birazionali) sono solo le trasformazioni lineari fratte, cioè le proiettività.

9.1.4. RICETTA PER PARAMETRIZZARE CURVE RAZIONALI. Data una curva proiettiva $\mathscr{C}$ di genere 0, per ottenerne una parametrizzazione, cioè una mappa birazionale $\mathbb{P}^1(K) \to \mathscr{C}$ è sufficiente trovare una funzione razionale $\varphi \in K(\mathscr{C})$ che abbia un unico polo (e dunque un unico zero). Questa definisce una mappa birazionale $\mathscr{C} \to \mathbb{P}^1(K)$ di cui la parametrizzazione cercata è una inversa birazionale.

Dal punto di vista più geometrico si può scrivere $\varphi = g_1/g_0$ con i g_i polinomi omogenei dello stesso grado, che quindi definiscono due ipersuperficie distinte, e intersecare la curva $\mathscr{C}$ con il fascio di ipersuperficie determinato da g_0, g_1: il fascio stesso è una retta proiettiva. Calcolare l'intersezione di $\lambda_0 g_0 + \lambda_1 g_1$ con $\mathscr{C}$ (togliendo naturalmente il ciclo base sulla curva) corrisponde a calcolare gli zeri sulla curva della funzione razionale $\varphi - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ (immagine inversa di $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ tramite φ).