Consideriamo ora il divisore $D=(g+1)p+(g+1)q$. Poiché $\deg(D)=2g+2$ possiamo usare la formula di Riemann-Roch semplificata

$$\ell(D)=\deg(D)+1-g=g+3\ .$$

Ora è chiaro che $j(D)=D$, e quindi viene indotto un endomorfismo lineare $j^*:\mathscr{L}(D)\to\mathscr{L}(D)$ con $(j^*)^2=\mathrm{id}$, quindi diagonalizzabile con autovalori ±1 (si tratta di una simmetria). Quindi abbiamo la decomposizione in autospazi $\mathscr{L}(D)=\mathscr{L}(D)^+\oplus\mathscr{L}(D)^-$ e possiamo già dire che $\mathscr{L}(D)^+=\langle 1,x,\dots,x^{g+1}\rangle$, avente dimensione $g+2$ (si tratta di composizioni di x con funzioni razionali sulla retta con ordini di polo a p e q non ececdenti $g+1$...), e quindi $\mathscr{L}(D)^-=\langle y\rangle$ risulta di dimensione 1 e $j^*y=-y$.

Vogliamo vedere che $y^2=cg(x)$ con $c\in K$ non nulla e $g(x)=\prod_i(x-a_i)$ polinomio nella x di grado $2g+2$. Per questo basta controllare che y^2 e $g(x)$ abbiano lo stesso divisore, in modo che il loro quoziente sia regolare e dunque costante. Calcoliamo quindi i divisori: risulta

$$\mathrm{div}(y)=\mathrm{div}_0(y)-\mathrm{div}_\infty(y)=\sum_i p_i-D$$

(perché $y(p_i)=-y(p_i)$ e quindi tutti i p_i entrano nel $\mathrm{div}_0(y)$, sono $2g+2$, d'altra parte gli unici poli possibili sono p e q, al massimo d'ordine $g+1$ ciascuno...), e

$$\mathrm{div}(g(x))=\sum_i\mathrm{div}(x-a_i)=\sum_i\mathrm{div}_0(x-a_i)-\sum_i\mathrm{div}_\infty(x-a_i)-=2\sum_i p_i-2D$$

come si voleva.

8.7.2. Per esercizio, si osservi che j induce un endomorfismo j^* di $\Omega^{\mathrm{reg}}(\mathscr{C})$ di quadrato identico, e che in effetti è $j^*=-\mathrm{id}$ (un differenziale fissato da j^* proviene da uno della retta proiettiva...).

8.7.3. Conclusione del discorso precedente è che *una curva proiettiva è iperellittica se e solo se è birazionale ad una curva algebrica piana iperellittica, cioè di una curva che in opportuno riferimento ammette equazione del tipo* $Y^2=\prod_{i=1}^{2g+2}(X-a_i)$ *(con* $a_i\neq a_j$ *per* $i\neq j$*).*

In particolare, curve iperellittiche ne esistono di ogni genere.

8.7.4. Differenziali per le curve iperellittiche e mappa canonica. Dalla descrizione precedente segue che

$$\Omega^{\mathrm{reg}}(\mathscr{C})=\langle\frac{dx}{y},x\frac{dx}{y},\dots,x^{g-1}\frac{dx}{y}\rangle$$
$$\mathscr{L}(\kappa)=\langle 1,x,\dots,x^{g-1}\rangle$$

e la mappa canonica

$$k:\mathscr{C}\longrightarrow\mathbb{P}^{g-1}(K)\qquad P\mapsto\begin{pmatrix}1\\x(P)\\\vdots\\x^{g-1}(P)\end{pmatrix}$$

si fattorizza attraverso x seguita dalla mappa di Veronese

$$\mathscr{C}\longrightarrow\mathbb{P}^1(K)\longrightarrow\mathbb{P}^{g-1}(K)\qquad P\mapsto x(P),\quad X\mapsto\begin{pmatrix}1\\X\\\vdots\\X^{g-1}\end{pmatrix}$$

e quindi mostra che il rivestimento ramificato di ordine 2 della retta proiettiva per una curva iperellittica è canonico (sia nel senso che è intrinseco, sia nel senso che è definito dal divisore canonico).

8.8. Teorema (sistemi canonici). *Sia $\mathscr{C}$ curva proiettiva di genere $g\geqslant1$. Allora la mappa canonica $k:\mathscr{C}\to\mathbb{P}^{g-1}(K)$ è una immersione se e solo se $\mathscr{C}$ non è iperellittica. Precisamente:*

(1) *se $\mathscr{C}$ non è iperellittica allora k immerge $\mathscr{C}$ in $\mathbb{P}^{g-1}(K)$ come curva di grado $2g-2$;*

(2) *se $\mathscr{C}$ è iperellittica allora k si fattorizza tramite un rivestimento con due fogli della retta proiettiva, seguito dalla immersione di Veronese in $\mathbb{P}^{g-1}(K)$.*

È già stato dimostrato tutto. □

8.9. Curve normali. Sia $\mathscr{C}$ una curva in $\mathbb{P}^n$, e supponiamo che il minimo sottospazio proiettivo contenente $\mathscr{C}$ (si dice spesso lo span lineare di $\mathscr{C}$) abbia dimensione r; allora si dice che $\mathscr{C}$ è normale