8.5. Curve Ellittiche Normali. Consideriamo una curva ellittica $\mathscr{E}$, che è di genere 1, per cui ogni divisore del tipo $D_n = nP$ è molto ampio se $n \geqslant 3$. In questo caso $\ell(nP) = n$ e dunque tali divisori determinano immersioni $\mathscr{E} \to \mathbb{P}^{n-1}(K)$ come curva di grado n:
(1) per $n = 3$ abbiamo $\mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ come cubica liscia;
(2) per $n = 4$ abbiamo $\mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ come curva liscia di grado 4;
(3) per $n = 5$ abbiamo $\mathscr{E} \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ come curva liscia di grado 5.
Le immagini di tali immersioni si dicono curve ellittiche normali.

8.6. Sistemi canonici. Un sistema lineare particolarmente importante è quello canonico, associato al divisore di un qualsiasi differenziale. Chiaramente nel caso della retta proiettiva tale sistema lineare è vuoto, quindi non interessante. Ricordiamo che se $\kappa = \mathrm{div}(\omega)$ con $\omega \in \Omega(\mathscr{C})$, allora $\deg \kappa = 2g - 2$ e $\ell(K) = g$ (quindi il sistema canonico ha grado $2g - 2$ e dimensione $g - 1$).

8.6.1. Punti base canonici. *Se $g \geqslant 1$ il sistema canonico è privo di punti base.*

Infatti basta verificare che $\ell(\kappa - \mathfrak{P}) = \ell(\kappa) - 1 = g - 1$ per ogni $\mathfrak{P} \in \mathscr{C}$, e questo segue dalle uguaglianze

$$1 = \ell(\mathfrak{P}) = \deg(\mathfrak{P}) + 1 - g + \ell(\kappa - \mathfrak{P})$$

(la prima perché $g \geqslant 1$, la seconda per Riemann-Roch).

8.6.2. Da questo segue che la mappa proiettiva $k : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^{g-1}(K)$ definita da κ ha come sezioni iperpiane esattamente il sistema lineare completo di κ.

8.6.3. Cerchiamo di capire quando la mappa canonica è una immersione. Dal criterio generale sappiamo che k è immersione se e solo se $\ell(K - \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}) = \ell(K) - 2$ per ogni $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q} \in \mathscr{C}$.

Viceversa, k non è immersione se e solo se esistono $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q} \in \mathscr{C}$ tali che

$$\ell(\kappa - \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}) = \ell(\kappa) - 1 = g - 1\ .$$

Usando il teorema di Riemann-Roch possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}\ell(\kappa - \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}) &= \deg(\kappa - \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}) + 1 - g + \ell(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})\\ &= \deg(\kappa) - 2 + 1 - g + \ell(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})\\ &= g - 3 + \ell(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})\end{aligned}$$

e quindi la condizione di non immersione equivale alla esistenza di $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q} \in \mathscr{C}$ tali che

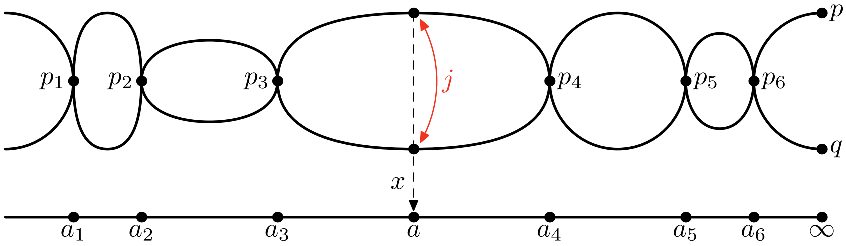
$$g - 3 + \ell(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}) = g - 1\ ,$$

e insomma $\ell(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}) = 2$. Questo significa che esiste una funzione non costante in $\mathscr{L}(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})$, dunque una funzione $\varphi : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^1(K)$ che sia rivestimento ramificato con 2 fogli.

Questo motiva la definizione seguente.

8.7. Definizione (Curve iperellittiche). *Una curva algebrica proiettiva di dice iperellittica se ammette una funzione razionale che dia un rivestimento di grado 2 della retta proiettiva.*

8.7.1. Realizzazioni piane per le curve iperellittiche. Sia $\mathscr{C}$ curva iperellittica di genere g; dunque per ipotesi esiste una mappa razionale $x : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^1(K)$ di grado 2 (rivestimento ramificato con 2 fogli). Dal teorema di Riemann-Hurwitz possiamo dedurre che $\mathrm{ram}(x) = 2g + 2$ (inoltre ogni punto di ramificazione ha ramificazione 1: di più non può!), e allora abbiamo $\mathrm{Ram}(x) = p_1 + \cdots + p_{2g+2}$. Sia $\mathrm{div}_\infty(x) = p + q$ (possiamo supporre che non sia di ramificazione, modulo comporre con una proiettività della retta). Diciamo $a_i = x(p_i)$ per ogni $i = 1, \ldots, 2g + 2$. Il seguente disegno può illustrare la situazione:



Definiamo la mappa $j : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ che per ogni $a \in \mathbb{P}^1(K)$ scambia tra loro le (due) antimmagini di a tramite x. Ovviamente abbiamo che $j^2 = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$.