(1) *Un divisore D con* $\deg(D) \geqslant 2g$ *non ha punti base.* Infatti abbiamo che $\kappa - D$ ha grado -2 e risulta

$$\ell(D) = \deg(D) + 1 - g$$
$$\ell(D - \mathfrak{P}) = \deg(D - \mathfrak{P}) + 1 - g = \deg(D) - g$$

da cui segue $\ell(D - P) = \ell(D) - 1$ per ogni $\mathfrak{P}$, come chiede il criterio.

(2) *Un divisore D con* $\deg(D) \geqslant 2g + 1$ *(non ha punti base ed) è molto ampio.* Infatti abbiamo che $\kappa - D$ ha grado -3 e risulta

$$\ell(D) = \deg(D) + 1 - g$$
$$\ell(D - \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}) = \deg(D - \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}) + 1 - g = \deg(D) - g - 1$$

da cui segue $\ell(D - \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}) = \ell(D) - 2$ per ogni $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$, come chiede il criterio.

8.3.3. Desingolarizzazione di curve? Dalle osservazioni precedenti segue che ogni divisore $D \in \mathrm{Div}(\mathscr{C})$ di grado d almeno $2g+1$ immerge $\mathscr{C}$ come curva liscia (di grado d) in uno spazio proiettivo di dimensione $d(D) = \ell(D) - 1 = d + 1 - g \geqslant g + 2$.

Più precisamente, usando $D = (2g + 1)\mathfrak{P}$ per un fissato $\mathfrak{P} \in \mathscr{C}$, possiamo avere una immersione $\varphi : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{P}^{d(D)}(K)$ come curva di grado $\deg(D)$ in modo tale che $\mathscr{C} \smallsetminus \{\mathfrak{P}\}$ si immerga in uno spazio affine $\mathbb{A}^{d(D)}(K)$. Infatti esiste un iperpiano H di $\mathbb{P}^{d(D)}(K)$ tale che $\varphi^* H = (2g + 1)\mathfrak{P}$, e possiamo usare come spazio affine il complementare di H.

8.4. Curve Razionali Normali. Consideriamo la retta proiettiva $\mathbb{P}^1(K)$, che è di genere 0, per cui ogni divisore del tipo $D_n = n\infty$ è molto ampio se $n \geqslant 1$. Si vede subito che $\mathscr{L}(n\infty) = \langle 1, X, X^2, \ldots, X^n \rangle_K$ e otteniamo le immersioni proiettive date da

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1(K) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(K) & & \\ X \equiv \binom{X_0}{X_1} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} & \equiv & \begin{pmatrix} X_0^n \\ X_0^{n-1} X_1 \\ \vdots \\ X_1^n \end{pmatrix} \end{array}$$

dette immersioni di Veronese, le cui immagini si dicono le curve razionali normali. Esploriamo i primi casi:

(1) per $n = 1$ troviamo la funzione identica di $\mathbb{P}^1(K)$ in sè.

(2) per $n = 2$ troviamo l'immersione di $\mathbb{P}^1(K)$ in $\mathbb{P}^2(K)$ come conica non degenere di equazione $X_0 X_2 - X_1^2$.

(3) per $n = 3$ troviamo l'immersione di $\mathbb{P}^1(K)$ in $\mathbb{P}^3(K)$ come curva di grado 3 definita parametricamente da

$$\begin{cases} X_0 = \mu^3 \\ X_1 = \lambda\mu^2 \\ X_2 = \lambda^2\mu \\ X_3 = \lambda^3 \end{cases}$$

(detta cubica sghemba) ovvero per esempio dalle tre equazioni cartesiane

$$X_0 X_2 - X_1^2 \quad , \quad X_0 X_3 - X_1 X_2 \quad , \quad X_0^2 X_3 - X_1^3 \ .$$

Si osservi l'interessante fenomeno per cui una curva nello spazio proiettivo tridimensionale può aver bisogno di tre equazioni per essere definita globalmente (rinunciando ad una equazione si hanno altre componenti). Però nell'intorno di ogni punto (in effetti in opportuni spazi affini) sono sufficienti due equazioni (come ci si aspetta) per definire la curva: si dice allora che si tratta di una curva "localmente ad intersezione completa", ma non "ad intersezione completa".

A titolo di esercizio, si verifichi che nel punto di coordinate affini $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ la retta tangente è data parametricamente da $\begin{pmatrix} a+t \\ a^2+2at \\ a^3+3a^2t \end{pmatrix}$, e il piano osculatore ha equazione $a^3 X_0 - 3a^2 X_2 + 3a X_1 - X_3 = 0$.

(n) Investigare i casi successivi.

8.4.1. Problema. Sia $\mathscr{C}$ curva in $\mathbb{P}^n$ irriducibile e non degenere (non contenuta in sottospazi proiettivi propri, cioè il suo span lineare sia tutto $\mathbb{P}^n$); allora il grado di $\mathscr{C}$ è maggiore o uguale ad n, ed è uguale ad n se e solo se è una curva razionale normale.