8.2.1. Dato un sistema lineare $G \leqslant |D|$, consideriamo il corrispondente sottospazio vettoriale V di $\mathscr{L}(D)$, e una sua base $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ su K. L'elemento $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ di $\mathbb{P}^n(K(\mathscr{C}))$ determina allora la mappa proiettiva olomorfa voluta. Si osservi che la scelta di un'altra base di V determina un cambiamento della mappa per una proiettività di $\mathbb{P}^n(K)$.

8.2.2. Data una mappa razionale $\varphi : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^n(K)$ abbiamo due costruzioni equivalenti per il sistema lineare associato.

(1) La prima consiste nel considerare il divisore $D = -\min_i \operatorname{div}(\varphi_i)$, e definire il sistema lineare usando $V_\varphi = \langle \varphi_0, \ldots, \varphi_n \rangle_K$ (sottospazio vettoriale di $\mathscr{L}(D)$) come

$$|\varphi| = \{\operatorname{div}(f) + D \ : \ f \in V_\varphi\}$$

(sottospazio proiettivo di $|D|$).
Si osservi che D dipende dalla scelta delle φ_i, ma i sistemi lineari $|D|$ e $|\varphi|$ dipendono solo da φ.

(2) La seconda costruzione è più geometrica e considera le sezioni iperpiane di $g(\mathscr{C})$:

$$|\varphi| = \{\operatorname{div}(\varphi^* H) = \varphi^* \operatorname{div}(H) \ : \ H \text{ iperpiano di } \mathbb{P}^n(K)\} \ .$$

L'equivalenza dei due metodi si può vedere considerando un iperpiano H di equazione $\sum_i a_i X_i = 0$ e supponendo che φ_0 abbia ordine minimo (possiamo supporre nullo) tra le φ_i (nel punto P considerato). Allora nella costruzione (1) abbiamo il divisore $\operatorname{div}(\sum_i a_i \varphi_i) - \operatorname{div}(\varphi_0)$, mentre nella costruzione (2) otteniamo il divisore $\operatorname{div}\Big(\frac{\sum_i a_i X_i}{X_0} \circ \varphi\Big) = \operatorname{div}\Big(\frac{\sum_i a_i \varphi_i}{\varphi_0}\Big) = \operatorname{div}(\sum_i a_i \varphi_i) - \operatorname{div}(\varphi_0)$.

8.2.3. Che le costruzioni siano una l'inversa dell'altra si vede facilmente considerando la costruzione (1) verso sinistra.

Che le mappe proiettive razionali siano non degeneri dipende dal fatto che sono generate usando funzioni razionali linearmente indipendenti su K.

Che i sistemi lineari che si ottengono siano senza punti base si vede facilmente in base alla costruzione (2): per ogni punto c'è qualche iperpiano H che non lo contiene.

Infine che i sistemi completi corrispondano a mappe dominanti discende subito dalle definizioni corrispondenti. □

8.2.4. A scanso di equivoci, si faccia attenzione al fatto che anche sistemi lineari con punti base danno luogo a mappe proiettive razionali, usando esattamente la stessa costruzione; il punto è che danno luogo esattamente alla stessa mappa di un sistema lineare senza punti base. Pertanto questa richiesta nell'enunciato serve solo per ottenere una biiezione tra sistemi lineari senza p.b. e mappe proiettive a meno di proiettività; altrimenti si avrebbe una applicazione suriettiva tra sistemi lineari e mappe proiettive razionali a meno di proiettività...

8.3. Definizione-Teorema (divisori molto ampi). *La mappa proiettiva $g : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^n(K)$ definita dal (sistema lineare completo del) divisore D è:*

(1) *iniettiva se e solo se $\ell(D - \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}) = \ell(D) - 2$ per ogni $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{Q}$ posti di $\mathscr{C}$;*

(2) *immersione (cioè iniettiva con differenziale ??? mai nullo) se e solo se $\ell(D - \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}) = \ell(D) - 2$ per ogni $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q} \in \mathscr{C}$ (cioè anche per $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$).*

Un divisore si dice molto ampio se la mappa proiettiva corrispondente è una immersione, cioè se vale la seconda condizione (la quale si può anche enunciare dicendo che per ogni $\mathfrak{P}$ il sistema lineare di $D - \mathfrak{P}$ non ha punti fissi).

Per la dimostrazione del teorema, basta osservare che $\varphi(\mathfrak{P}) = \varphi(\mathfrak{Q})$ se e solo se $\mathscr{L}(D - \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}) = \mathscr{L}(D - \mathfrak{P}) = \mathscr{L}(D - \mathfrak{Q})$, e l'analoga asserzione per "$\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$" (cioè quando in $\mathfrak{P}$ si annulla il differenziale di φ). ??? □

8.3.1. Si osservi che le mappe iniettive che non siano immersioni sono meno interessanti, perché danno luogo a curve singolari. Per esempio $T \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix}$ è iniettiva, ma non immersione e l'immagine nel piano contiene un posto cuspoidale.

8.3.2. Condizioni numeriche. Come applicazione del teorema di Riemann-Roch vediamo ora criteri "numerici" sul grado dei divisori per essere senza p.b. e molto ampi.