Dunque otteniamo questa tabellina grado-genere:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| grado | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | $\cdots$ |
| genere | 6 | 7 | 9 | 9 | 12 | 13 | 15 | 15 | 18 | 19 | 21 | 21 | $\cdots$ |

**7.3.3.** Le curve di equazioni $Y^5 = \prod_{i-1}^{d}(X-\alpha_i)$ con $d \geqslant 6$ (e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$) hanno genere dato da

$$g(\mathscr{C}) = \begin{cases} 2d-4 & \text{se } d \equiv 0(5) \\ 2d-2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque otteniamo questa tabellina grado-genere:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| grado | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | $\cdots$ |
| genere | 10 | 12 | 14 | 16 | 16 | 20 | 22 | 24 | 26 | 26 | 30 | $\cdots$ |

**7.3.4.** Per esercizio, esplorare il caso di curve di equazioni $Y^n = \prod_{i-1}^{d}(X-\alpha_i)$ con $d \geqslant n+1$ (e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$).

## 8. Trasformazioni e immersioni proiettive di curve tramite divisori.

**8.1.** Vogliamo, utilizzando i divisori e gli spazi di funzioni razionali loro associati, studiare le funzioni razionali da una curva data $\mathscr{C}$ in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(K)$. Si tratta di funzioni che si possono esprimere tramite funzioni razionali della curva $\mathscr{C}$, e la cui immagine è o un punto o una curva algebrica in $\mathbb{P}^n(K)$.

**8.1.1.** Osserviamo che esiste una applicazione canonica

$$\mathbb{P}^n(K(\mathscr{C})) \longrightarrow \mathrm{Raz}_K(\mathscr{C}, \mathbb{P}^n(K))$$

che è una biiezione, e identifica le mappe razionali $\mathscr{C} \to \mathbb{P}^n(K)$ con le $(n+1)$-uple non nulle di funzioni razionali su $\mathscr{C}$, a meno di fattori moltiplicativi non nulli in $K(\mathscr{C})$.

L'unico punto delicato è in effetti la definizione dell'applicazione, che si ottiene associando ad ogni $(n+1)$-upla di funzioni razionali $\varphi_i$ (che possiamo anche supporre polinomiali?) la mappa di $\mathscr{C}$ in $\mathbb{P}^n(K)$ che ad ogni posto $\mathfrak{P}$ di $\mathscr{C}$ associa il posto di $\mathbb{P}^n(K)$ di componenti $\varphi_i(\mathfrak{P}(T))$ usando una qualsiasi parametrizzazione di $\mathfrak{P}$.

Si può definire anche l'applicazione tra i punti di $\mathscr{C}$ e i punti di $\mathbb{P}^n(K)$, mandando ogni punto non singolare nel centro (opportunamente calcolato) dell'immagine del suo posto.

**8.1.2.** Non degenerazione. Una mappa proiettiva razionale $\varphi : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^n(K)$ è detta non degenere se e solo se l'immagine $\varphi(\mathscr{C})$ non è contenuta in alcun iperpiano di $\mathbb{P}^n(K)$. Questo equivale evidentemente a dire che la $(n+1)$-upla di $\mathbb{P}^n(K(\mathscr{C}))$ corrispondente a $\varphi$ è formata da funzioni razionali linearmente indipendenti su $K$.

**8.1.3.** Grado. Il grado di una mappa proiettiva razionale $\varphi : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^n(K)$ è il grado della curva immagine $\varphi(\mathscr{C})$, cioè è il numero di punti (contati con molteplicità) di intersezione dell'immagine $\varphi(\mathscr{C})$ con un generico iperpiano di $\mathbb{P}^n(K)$. Non si confonda con il grado della funzione razionale $\mathscr{C} \to \varphi(\mathscr{C})$ tra curve...

**8.1.4.** Mappe dominanti. Una mappa proiettiva razionale $\varphi : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^n(K)$ si dice dominante se non si può ottenere per proiezione da mappe $\varphi : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^m(K)$ con $m \geqslant n$. Ricordiamo che, dati $\mathbb{P}^n(K) \leqslant \mathbb{P}^m(K)$ e un complementare $\mathbb{L}$, la proiezione su $\mathbb{P}^n(K)$ di centro $\mathbb{L}$ è la mappa $\pi$ definita da $\pi(P) = (P \vee \mathbb{L}) \wedge \mathbb{P}^n(K)$ che va da $\mathbb{P}^m(K) \smallsetminus \mathbb{L}$ a $\mathbb{P}^n(K)$.

**8.2.** Teorema (corrispondenza fondamentale). *Esistono delle biiezioni canoniche*

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Sistemi lineari senza p.b.}\\ \bullet \text{ di dimensione } n\\ \bullet \text{ di grado } r\end{array}\right\} \cong \left\{\begin{array}{l}\text{Mappe razionali non degeneri}\\ \bullet\ \mathscr{C} \to \mathbb{P}^n(K)\\ \bullet \text{ (immagine) di grado } r\end{array}\right\}/\text{proiettività}$$

*che si restringono a biiezioni canoniche tra i sottinsiemi*

$$\left\{\text{Sistemi lineari completi}\right\} \cong \left\{\text{Mappe razionali dominanti}\right\}/\text{proiettività}$$

Tutte le asserzioni seguono facilmente dalla costruzione delle due mappe, una inversa dell'altra, che ora diamo esplicitamente.