7.1.7. Se $g(\mathscr{D}) = 1$ e $g(\mathscr{C}) > 1$, allora $\mathrm{ram}(F) = 2(g(\mathscr{C}) + 1)$.
7.1.8. Se $g(\mathscr{D}) > 1$ e $g(\mathscr{C}) > g(\mathscr{D})$, allora $\mathrm{ram}(F) \leqslant 2(g(\mathscr{C}) - 2g(\mathscr{D}) + 1)$.

7.2. Formule di Plücker per il genere. L'argomento chiave è il seguente. Sia $\mathscr{C}$ la curva proiettiva piana di equazione $f(X_0, X_1, X_2) = 0$ di grado d. Eventualmente cambiando il riferimento possiamo supporre che $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \notin \mathscr{C}$ e che la retta impropria $X_0 = 0$ non sia tangente a $\mathscr{C}$. Sia $e = \deg_{X_2} f$ e consideriamo la mappa $\pi : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^1_C$ che manda (X_0, X_1, X_2) in (X_0, X_1) (nella parte affine manda (X, Y) in X, la proiezione sull'asse delle ascisse). Allora i punti di ramificazione di π sono tutti e soli quelli con tangente "verticale", cioè i punti della curva $\mathscr{C}$ che appartengono anche alla polare di $\mathscr{C}$ rispetto a $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ (ma non alla retta impropria). Si tratta dei punti affini che soddisfano alle equazioni $f = 0$ e $\frac{\partial}{\partial X_2} f = 0$.

Possiamo usare la formula di Riemann-Hurwitz per π: $g(\mathscr{C}) = 1 - \deg(\pi) + \mathrm{ram}(\pi)/2$, tenendo conto che $\deg(\pi) = \deg(\mathscr{C})$ e valutando $\mathrm{ram}(\pi)$.

7.2.1. In qualche caso si possono fare i conti anche violando le condizioni richieste.

7.2.2. Caso di curve non singolari. Se $\mathscr{C}$ è non singolare, e il suo grado è d, possiamo supporre $d = \deg_{X_2} f$, e basta calcolare i punti di intersezione di $\mathscr{C}$ con la polare $\mathscr{P}_{e_2}(\mathscr{C})$, che sono esattamente $d(d-1)$ per il teorema di Bézout. Dunque risulta:

$$g(\mathscr{C}) = 1 - d + \frac{d(d-1)}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

(formula genere-grado per curve proiettive piane lisce, che già conoscevamo).

7.2.3. Caso di curve iperellittiche. Se consideriamo le curve di equazione $Y^2 = \prod_{i-1}^{m}(X - \alpha_i)$ ($\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$) sappiamo che l'unico punto singolare è il punto improprio dell'asse Y, e con tangente esattamente la retta impropria. Tuttavia, la proiezione sull'asse delle X è chiaramente un rivestimento ramificato con due fogli, sono di ramificazione (uno) tutti i punti della curva sull'asse delle X, e l'unica incertezza riguarda il comportamento del punto improprio, che potrebbe portare ramificazione 1 oppure 0. D'altra parte, poiché la ramificazione totale dev'essere pari, risulta necessariamente questo: se $d = 2n$ è pari, allora il punto improprio non ramifica, se $d = 2n{+}1$ è dispari, allora il punto improprio ha ramificazione 1. Quindi abbiamo

$$g(\mathscr{C}) = \begin{cases} 1 - 2 + 2d/2 = d - 1 & \text{se } d = 2n \\ 1 - 2 + (2d+2)/2 = d & \text{se } d = 2n{+}1. \end{cases}$$

Otteniamo quindi la seguente tabellina che distingue di casi pari e dispari delle ipergeometriche:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
genere ($d = 2n$)	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
genere ($d = 2n{+}1$)	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$

da cui si osserva che ogni genere può essere realizzato da curve proiettive piane ipergeometriche, (si tratta quasi sempre di curve singolari). Si noti anche che curve ellittiche (iperellittiche di grado 3, non singolari) e iperellittiche di grado 4 sono ambedue di genere 1:

grado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
genere	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	$\cdots$

7.2.4. Caso di curve singolari. Per trattare in generale il caso di curve singolari, bisogna nel ragionamento generale prima esposto tener conto di quanto i punti singolari contribuiscono alla intersezione della curva con la polare descritta, e di quanto effettivamente essi contribuiscano alla ramificazione totale.

Conviene perciò che il sistema di riferimento sia tale che nessuna tangente nei punti singolari sia una retta "verticale". Per ogni tale punto P possiamo distinguere i rami $\mathfrak{P}_i$; allora è chiaro che ciascuno contribuisce con $m_{\mathfrak{P}_i}(\mathscr{C}')$ al calcolo di intersezione di $\mathscr{C}$ con $\mathscr{C}'$, mentre è chiaro che contribuisce con $m_{\mathfrak{P}_i} - 1$ alla ramificazione totale. Questo porta alle formule di Plücker generalizzate per il genere:

$$g(\mathscr{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{\sum_{\mathfrak{P} \in \mathscr{C}} (m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{C}') - m_{\mathfrak{P}} + 1)}{2}$$