(fare la differenza) per ottenere $d(D+\mathfrak{P})-d(D)=i(D+\mathfrak{P})-i(D)+1$, che dà subito il risultato voluto.

6.2.4. Reciprocità di Brill-Nœther. Se due divisori D, E di $\mathscr{C}$ sono tali che $|D+E|=\kappa$, allora abbiamo $\deg(D)-2d(D)=\deg(E)-2d(E)$. Infatti si vede subito che

$$i(D)=d(\kappa-D)+1=d(E)+1 \qquad \text{e} \qquad i(E)=d(\kappa-E)+1=d(D)+1$$

il che permette di scrivere l'uguaglianza di Riemann-Roch

$$d(D)=\deg(D)-g+d(E)+1 \qquad \text{e} \qquad d(E)=\deg(E)-g+d(D)+1$$

e sottraendo ottenere il risultato voluto.

6.2.5. Divisori speciali. Se D è un divisore speciale, allora D impone esattamente $\deg(D)-d(D)$ condizioni lineari indipendenti sui divisori canonici.

Infatti $\deg(D)-d(D)=g-i(D)=\ell(\kappa)-\ell(\kappa-D)$.

6.2.6. Teorema di Clifford. Se D è un divisore speciale (cioè $i(D)>0$), allora $\deg(D)\geqslant 2d(D)$, ovvero $d(D)\leqslant\frac{1}{2}\deg(D)$ (e ciò resta vero per ogni sistema lineare contenuto in un sistema lineare completo speciale, ovviamente).

Per la dimostrazione, basta considerare un divisore E tale che $|D+E|=\kappa$; poiché vi sono $i(D)$ divisori canonici indipendenti contenenti D, e solo 1 contenente $D+E$, allora E impone almeno $i(D)-1$ condizioni indipendenti a divisori del sistema canonico. Quindi $g-i(E)\geqslant i(D)-1$. Usando a sinistra che $i(E)=d(D)+1$, e a destra Riemann-Roch nella forma $i(D)=d(D)+g-\deg(D)$ otteniamo esattamente la disuguaglianza di Clifford.

Alternativa: consideriamo un divisore E tale che $|D+E|=\kappa$. Per ipotesi esiste $g\in\mathscr{L}(D)$ tale che $g\notin\mathscr{L}(D-\mathfrak{P})$ per ogni $\mathfrak{P}\leqslant E$. Ne segue che la mappa $f\mapsto gf$ tra i quozienti $\mathscr{L}(E)/\mathscr{L}(0)\longrightarrow\mathscr{L}(\kappa)/\mathscr{L}(D)$ è iniettiva, e dunque $\ell(E)-1\leqslant g-\ell(D)$. Applicando Riemann-Roch al primo termine si ottiene $\deg(E)-g+\ell(\kappa-E)\leqslant g-\ell(D)$. Infine usando che $\deg(E)=2g-2-\deg(D)$ e $\ell(\kappa-E)=\ell(D)$ otteniamo $2\ell(D)\leqslant\deg(D)+2$.

7. Teorema di Riemann-Hurwitz e formule di Plücker.

7.1. Teorema di Riemann-Hurwitz. Usando la formula per (il grado del)l'immagine inversa di differenziali per un morfismo razionale $F:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ di curve, e ricordando che $\deg\kappa(\mathscr{C})=2g(\mathscr{C})-2$ e $\deg\kappa(\mathscr{D})=2g(\mathscr{D})-2$, otteniamo subito che

$$2g(\mathscr{C})-2=(2g(\mathscr{D})-2)\deg(F)+\mathrm{ram}(F)$$

che di solito si usa per calcolare il genere di $\mathscr{C}$ noto quello di $\mathscr{D}$:

$$g(\mathscr{C})=(g(\mathscr{D})-1)\deg(F)+1+\frac{1}{2}\mathrm{ram}(F)\ .$$

Vi sono varie osservazioni interessanti:

7.1.1. La ramificazione è necessariamente un intero pari.

7.1.2. Se $g(\mathscr{D})=0$ (caso molto utile è usare come $\mathscr{D}$ una retta proiettiva) la formula diventa più semplice e dà

$$g(\mathscr{C})=1-\deg(F)+\frac{1}{2}\mathrm{ram}(F)$$

che useremo per ricavare le formule generali di Plücker per il genere di curve piane qualsiasi.

7.1.3. Poiché $\deg(F)\geqslant 1$ e $\mathrm{ram}(F)\geqslant 0$, abbiamo che $g(\mathscr{C})\geqslant g(\mathscr{D})$, e dunque non possono esistere rivestimenti ramificati da curve di genere minore a curve di genere maggiore.

7.1.4. Se $g(\mathscr{C})=1=g(\mathscr{D})$, allora necessariamente $\mathrm{ram}(F)=0$, dunque un rivestimento tra curve ellittiche, o tra curve di genere 1, non è mai ramificato.

7.1.5. Se $g(\mathscr{C})=g(\mathscr{D})>1$, allora necessariamente $\deg(F)=1$ ed F è un isomorfismo. Altrimenti si avrebbe $\deg(F)=\frac{2g(\mathscr{C})-2-\mathrm{ram}(F)}{2g(\mathscr{D})-2}=1-\frac{\mathrm{ram}(F)}{2g(\mathscr{D})-2}\leqslant 1$ (visto che $\frac{\mathrm{ram}(F)}{2g(\mathscr{D})-2}>0$), il che è assurdo.

7.1.6. Se $g(\mathscr{D})=0$ e $g(\mathscr{C})>0$, allora $\mathrm{ram}(F)\geqslant 2(g(\mathscr{C})+1)$.