$\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(r\mathscr{D}) = D + D' + \mathfrak{P} + D'' + E$; ne segue che il sistema lineare $|D+\mathfrak{P}|$ è il residuo rispetto a $D'+D''+E$ dei divisori di intersezione di aggiunte di grado $d-2$. Ma ogni tale aggiunta, siccome l'intersezione con $\mathscr{C}$ contiene D'' (che sono $d-1$ punti allineati), deve contenere r, e quindi $\mathfrak{P}$. Dunque $\mathfrak{P}$ compare in tutti i divisori di $|D+\mathfrak{P}|$, come si voleva.

Proviamo la seconda strategia: nel solito sistema di riferimento possiamo supporre che $\kappa = E_{d-3} = (d-3)D_\infty - E$ (e che $D \geqslant 0$). Per ipotesi esiste $h \in \mathscr{L}(\kappa - D)$ tale che $h \notin \mathscr{L}(\kappa-(D+\mathfrak{P}))$. Scriviamo $h = H/X_0^{d-3}$ con H aggiunta di grado $d-3$ e $\mathrm{div}_{\mathscr{C}} H = D + D' + E$ con $\mathfrak{P} \notin D'$, e consideriamo una retta r con $\mathrm{div}_{\mathscr{C}} r = \mathfrak{P} + D''$ dove D'' è formato da $d-1$ punti distinti. Allora rH è aggiunto di grado $d-2$, e $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(rH) = D + \mathfrak{P} + D' + D'' + E$. Sia ora $f \in \mathscr{L}(D+\mathfrak{P})$, e studiamo $\mathrm{div}(f) + D \sim D$, quindi $\mathrm{div}(f) + D + \mathfrak{P} \sim D + \mathfrak{P}$. Perciò esiste una aggiunta G di grado $d-2$ tale che $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(G) = \mathrm{div}(f) + D + \mathfrak{P} + D' + D'' + E$. Però H contiene D'', quindi contiene $\mathfrak{P}$, da cui $\mathrm{div}(f) + D + \mathfrak{P} \geqslant \mathfrak{P}$, ovvero $\mathrm{div}(f) + D \geqslant 0$, e quindi $f \in \mathscr{L}(D)$ come si voleva.

6.1.3. Teorema di Riemann-Roch. *Per ogni divisore D su $\mathscr{C}$ abbiamo l'uguaglianza*

$$\ell(D) = \deg(D) + 1 - g + \ell(\kappa - D)$$

o equivalentemente

$$d(D) = \deg(D) - g + i(D)$$

dove g è il genere della curva definito dal teorema di Riemann.

La dimostrazione procede per induzione sull'indice di specialità:

(0) supponiamo $i(D) = 0$; procediamo per induzione su $d(D)$. Per il caso base osserviamo che la formula di Riemann-Roch può essere falsa solo se $d(D) > \deg(D) - g$, ma questo (essendo D non speciale, $\deg(D) > d(\kappa) \geqslant g-1$) implica $d(D) > g - g = 0$, e quindi $d(D) \geqslant 1$; per divisori con $d(D) = 0$ la formula è quindi vera.
Supponiamo $d(D) \geqslant 1$ e la formula di Riemann-Roch vera per ogni divisore di grado $d(D)-1$. Sia $\mathfrak{P}$ un posto di $\mathscr{C}$ non fisso per D. Allora $|D| - \mathfrak{P} = |D - \mathfrak{P}|$ è sistema lineare di grado $\deg(D)-1$ e di dimensione $d(D)-1$. Per il lemma di riduzione abbiamo allora $i(D-\mathfrak{P}) = i(D) = 0$ e possiamo applicare l'ipotesi induttiva a $D - \mathfrak{P}$, ottenendo $d(D-\mathfrak{P}) = \deg(D-\mathfrak{P}) - g$, da cui $d(D) = \deg(D) - g$ come si voleva.

(1) Supponiamo allora $i(D) > 0$. Troviamo un posto $\mathfrak{P}$ di $\mathscr{C}$ non fisso per $\kappa - D$; quindi $\ell(\kappa - D) \neq \ell(\kappa - D - \mathfrak{P})$, e quindi $i(D+\mathfrak{P}) \neq i(D)$, cioè $i(D+\mathfrak{P}) = i(D) - 1$. Applichiamo allora l'ipotesi induttiva a $D + \mathfrak{P}$: risulta $d(D+\mathfrak{P}) = \deg(D+\mathfrak{P}) - g + i(D+\mathfrak{P})$. Per il lemma di riduzione abbiamo $d(D+\mathfrak{P}) = d(D)$, e quindi $d(D) = \deg(D) - g + i(D)$, come si voleva. $\square$

6.2. Prime applicazioni del teorema di Riemann-Roch. Vi sono varie applicazioni, non banali, quasi immediate del teorema di Riemann-Roch; ne vediamo solo alcune della miriade possibile...

6.2.1. Caso facile di Riemann-Roch. Per ogni divisore D su $\mathscr{C}$ di grado $\deg(D) > \deg(\kappa) = 2g-2$, abbiamo l'uguaglianza

$$\ell(D) = \deg(D) + 1 - g$$

o equivalentemente

$$d(D) = \deg(D) - g$$

(poiché in tal caso $i(D) = 0$).

6.2.2. Sistema canonico e differenziali. Il sistema canonico κ ha grado $\deg \kappa = 2g-2$ e dimensione $d(\kappa) = g-1$ (cioè $\ell(\kappa) = g$, che è anche $\dim_K \Omega^{\mathrm{reg}}(\mathscr{C})$: quindi il genere di una curva è la dimensione del K-spazio dei differenziali regolari sulla curva, interpretazione differenziale del genere). Sappiamo già, ma ripetiamo, che $i(\kappa) = 1$.

Inoltre il sistema canonico è l'unico sistema lineare con quel grado e quella dimensione su $\mathscr{C}$: perché ogni sistema lineare G su $\mathscr{C}$ di dimensione $g-1$ e grado $2g-2$ ha indice di specialità 1, quindi è contenuto in κ (stesso grado) e ha la stessa dimensione. Quindi κ è un invariante birazionale di $\mathscr{C}$?

Infine, il sistema lineare κ non ha punti base; perché da $\ell(\mathfrak{P}) = \deg(\mathfrak{P}) + 1 - g + \ell(\kappa - \mathfrak{P})$ otteniamo (per $g > 0$, altrimenti il sistema canonico è vuoto) $\ell(\kappa - \mathfrak{P}) = g - 1 = \ell(\kappa) - 1$.

6.2.3. Riduzione. Il lemma di riduzione di Nœther si può ora completare dicendo che al più una delle uguaglianze può essere vera, e quindi che esattamente una delle due uguaglianze è vera. Infatti basta confrontare

$$d(D) = \deg(D) - g + i(D) \qquad \text{con} \qquad d(D+\mathfrak{P}) = \deg(D+\mathfrak{P}) - g + i(D+\mathfrak{P})$$