5.7. Divisori canonici e divisori jacobiani. Vi è una relazione interessante tra divisori canonici e divisori associati a fasci di ipersuperficie: *Sia $\varphi \in K(\mathscr{C})$, $\varphi = f_1/f_0$ con f_1, f_0 polinomi omogenei dello stesso grado. Consideriamo il sistema lineare dei divisori di intersezione di $\mathscr{C}$ con il fascio generato da f_1, f_0: definiamo allora il divisore $J(\varphi)$ detto il divisore Jacobiano di φ come $\sum_{\mathfrak{P}}(n_{\mathfrak{P}} - 1)\mathfrak{P}$ dove $n_{\mathfrak{P}}$ è il coefficiente di $\mathfrak{P}$ nell'unico divisore di intersezione in cui compare $\mathfrak{P}$. Allora risulta che $\mathrm{div}(d(\varphi)) = J(\varphi) - 2\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(f_0)$.*

Basta confrontare gli ordini dei divisori nei vari posti della curva, distinguendo $\varphi - \lambda$ per $\lambda \in K$ oppure $\lambda = \infty$:

(1) se $\mathfrak{P}$ appartiene a $\mathrm{div}_0(\varphi - \lambda) = \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(f_1 - \lambda f_0)$, allora $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}} d\varphi = n_{\mathfrak{P}} - 1$, perché $\varphi(\mathfrak{P}(T))$ comincia con $\lambda + T^{n_{\mathfrak{P}}}$;

(2) se $\mathfrak{P}$ appartiene a $\mathrm{div}_\infty(\varphi) = \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(f_0)$, allora $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}} d\varphi = -n_{\mathfrak{P}} - 1 = (n_{\mathfrak{P}} - 1) - 2n_{\mathfrak{P}}$, perché $\varphi(\mathfrak{P}(T))$ comincia con $T^{-n_{\mathfrak{P}}}$.

Sommando i contributi troviamo esattamente la relazione cercata.

5.7.1. Divisori jacobiani e aggiunte di grado $\deg(\mathscr{C}) - 1$. I divisori Jacobiani sono residui rispetto al divisore aggiunto E delle intersezioni con $\mathscr{C}$ di aggiunte di grado $\deg(\mathscr{C}) - 1$.

Basta, per esempio nel riferimento finora usato, mostrare che $\mathrm{div}(dX) + 2\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(X_0)$ (che è un divisore jacobiano, essendo $X = X_1/X_0$) è uguale al divisore $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\partial F/\partial X_2) - E$ (visto che $\partial F/\partial X_2$ è una delle aggiunte considerate). Questo segue dalla descrizione dei divisori canonici in termini di aggiunte: da $\mathrm{div}(\frac{\mathrm{d}X}{\partial f/\partial Y}) = (d-3)D_\infty - E$ e usando che $\partial f/\partial Y$ si scrive in termini omogenei $(\partial F/\partial X_2)/X_0^{d-1}$, si ottiene $\mathrm{div}(dX) - \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\partial F/\partial X_2) + (d-1)D_\infty = (d-3)D_\infty - E$, e basta riordinare.

6. Teorema di Riemann-Roch.

6.1. Teorema di Riemann-Roch (via Brill-Nœther). Il teorema di Riemann-Roch determina una uguaglianza trovando il termine mancante nel teorema di Riemann. Vedremo una dimostrazione dovuta essenzialmente a Nœther.

6.1.1. Indice di specialità di divisori. Per ogni divisore effettivo D, definiamo il suo indice di specialità

$$i(D) = \ell(\kappa - D) = d(\kappa - D) + 1$$

dove κ è qualunque divisore canonico (cioè $\mathrm{div}(\omega)$ per un qualunque differenziale non nullo). Si osservi che $i(D)$ è il numero di divisori canonici linearmente indipendenti contenenti D.

Diciamo che D è speciale se $i(D) > 0$.

Vi sono subito alcune facili considerazioni:

(1) se $D \sim D'$ allora $i(D) = i(D')$;

(2) $i(\mathrm{div}(\varphi)) = 0$ (divisori principali sono non speciali);

(3) $i(\mathrm{div}(\omega)) = 1$ (divisori canonici sono speciali di indice 1);

(4) se $D \leqslant D'$ allora $i(D) \geqslant i(D')$;

(5) la differenza $i(D + \mathfrak{P}) - i(D)$ vale 0 oppure 1 (come per ℓ e d...).

(6) si vede subito che se $\deg(\kappa - D) < 0$, allora $i(D) = 0$, quindi solo divisori di grado "piccolo" possono essere speciali: se $i(D) \neq 0$ allora abbiamo $\deg(D) \leqslant \deg(\kappa)$.

6.1.2. Lemma di riduzione di Nœther. *Per ogni divisore effettivo D (basta che $\ell(D) > 0$, cioè $|D| \neq \varnothing$) e per ogni posto $\mathfrak{P} \in \mathscr{C}$ vale almeno una delle due uguaglianze*

$$d(D + \mathfrak{P}) = d(D) \qquad e \qquad i(D + \mathfrak{P}) = i(D)$$

(cioè, se $i(D+\mathfrak{P}) \neq i(D)$ allora $d(D+\mathfrak{P}) = d(D)$, oppure se $d(D+\mathfrak{P}) \neq d(D)$ allora $i(D+\mathfrak{P}) = i(D)$).

Possiamo supporre $\mathscr{C}$ ordinaria e $\mathfrak{P}$ punto non singolare (a meno di trasformazioni quadratiche). Supponiamo $i(D + \mathfrak{P}) \neq i(D)$ e vogliamo dismostrare che $d(D + \mathfrak{P}) = d(D)$. Possiamo ragionare in termini di divisori e mostrare che la mappa naturale $|D| \to |D+\mathfrak{P}|$ (ogni elemento in lui stesso sommato con $\mathfrak{P}$) è una biiezione; oppure possiamo ragionare in termini di funzioni razionali e dimostrare che l'inclusone canonica $\mathscr{L}(D) \leqslant \mathscr{L}(D + \mathfrak{P})$ è una uguaglianza.

Proviamo la prima strategia: poiché $i(D+\mathfrak{P}) \neq i(D)$, esiste un aggiunto speciale $\mathscr{D}$ (cioè di grado $\deg \mathscr{C} - 3$) con $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}\mathscr{D} = D + D' + E$ con $\mathfrak{P} \notin D'$. Consideriamo una retta r tale che $\mathrm{div}_{\mathscr{C}} r = \mathfrak{P} + D''$ dove D'' è formato da $d-1$ punti distinti. Allora $r\mathscr{D}$ (solito abuso) è aggiunto di grado $d-2$, e