5.5.1. OSSERVAZIONI.

(0) Usando il divisore nullo, troviamo che e $\Omega(0) = \Omega^{\rm reg}(\mathscr{C})$ (differenziali regolari).

(1) Se $D \sim D'$ (linearmente equivalenti), allora abbiamo un isomorfismo $\Omega(D) \to \Omega(D')$ di K-spazi vettoriali definito da $\omega \mapsto g\omega$ se $D - D' = \mathrm{div}(g)$.

(2) Sia $\omega \in \Omega(\mathscr{C})$ non nullo. Allora per ogni $D \in \mathrm{Div}(\mathscr{C})$ abbiamo un isomorfismo di K-spazi vettoriali $\mathscr{L}(D) \to \Omega(\mathrm{div}(\omega) - D)$ che manda f in $f\omega$. In particolare abbiamo che si tratta di spazi di dimensione finita su K. Inoltre, $\Omega(\mathrm{div}(\omega)) \cong \mathscr{L}(0) \cong K$ e $\Omega(0) \cong \mathscr{L}(\mathrm{div}(\omega))$ (saremo interessati al calcolo di grado e dimensione di questo spazio, che è un invariante birazionale per la curva $\mathscr{C}$).

(3) (PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ) Siano $\omega \in \Omega(\mathscr{C})$ e $D, E \in \mathrm{Div}(\mathscr{C})$ tali che $D + E = \mathrm{div}(\omega)$. Allora abbiamo isomorfismi canonici $\mathscr{L}(D) \cong \Omega(E)$ e $\mathscr{L}(E) \cong \Omega(D)$.

(4) Se $D \leqslant D'$ allora risulta $\Omega(D) \geqslant \Omega(D')$.

5.5.2. CLASSE CANONICA E SISTEMA LINEARE CANONICO DI $\mathscr{C}$. Abbiamo già detto che i differenziali su $\mathscr{C}$ hanno divisori che sono linearmente equivalenti tra loro; è anche facile verificare che un divisore linearmente equivalente al divisore di un differenziale è a sua volta divisore di un differenziale. *Quindi i divisori di differenziali formano una classe modulo* $\mathrm{PDiv}(\mathscr{C})$ *che si chiama classe canonica (e i suoi elementi divisori canonici) di* $\mathscr{C}$*:*

$$\kappa = \kappa(\mathscr{C}) = \mathrm{div}(\Omega(\mathscr{C})) = \mathrm{div}(\omega) + \mathrm{PDiv}(\mathscr{C})$$

per ogni $\omega \in \Omega(\mathscr{C})$ *non nullo. Diremo sistema canonico, e indicheremo sempre con* $\kappa = \kappa(\mathscr{C})$ *per (non) fare confusione, il sistema lineare formato dai divisori canonici effettivi, che è spazio proiettivo con spazio vettoriale sovrastante* $\Omega^{\rm reg}(\mathscr{C}) = \Omega(0) \cong \mathscr{L}(\kappa)$ *(per esempio, il sistema canonico della retta proiettiva è vuoto).* Di solito si usa la notazione $K = K(\mathscr{C})$ per la classe canonica, ma purtroppo noi abbiamo chiamato K il corpo di base...

5.5.3. ORDINI DI DIFFERENZIALI PER CURVE ORDINARIE. Per una curva piana ordinaria, si può calcolare l'ordine dei differenziali scegliendo un opportuno riferimento e un opportuno differenziale: *se* $d = \deg\mathscr{C}$ *e* $g = g(\mathscr{G})$ *risulta allora*

$$\deg(\kappa) = 2g - 2 = d(d-3) - \deg(E)\ .$$

Come d'usuale scegliamo il riferimento in modo che il punto improprio dell'asse delle ordinate non appartenga alla curva, nessuna retta del suo fascio (rette verticali) sia tangente in punti singolari, e la retta impropria non sia tangente alla curva. Usiamo il differenziale $\frac{\mathrm{d}X}{\partial f/\partial Y}$ di cui abbiamo già studiato le trasformazioni all'infinito. In tal caso nei d punti impropri l'ordine è $d-3$, nei punti non singolari affini l'ordine è nullo. Nei punti singolari si può ragionare così: supponiamo che il punto sia l'origine e la retta tangente in un posto l'asse delle ascisse: allora il posto ha parametrizzazione del tipo $\binom{T}{T^s+\ldots}$, ed f comincia con $f_r = Yf_{r-1}(X,Y)$, la cui derivata presenta uno zero d'ordine $r-1$ se r è la molteplicità per $\mathscr{C}$ del punto singolare. Dunque il differenziale presenta un polo d'ordine $r(r-1)$ nel punto singolare. Sommando i contributi si ottiene l'espressione voluta (la seconda, veramente: per la prima basta ricordare l'espressione del genere per curve ordinarie).

5.6. DIVISORI CANONICI E AGGIUNTE DI GRADO $\deg(\mathscr{C})-3$. *Sia* $\mathscr{C}$ *una curva piana ordinaria,* E *il suo divisore aggiunto, e sia* $\mathscr{D}$ *una curva di grado* $\deg\mathscr{C}-3$*; allora il divisore* $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{D})-E$ *è un divisore canonico. Dunque il sistema canonico è formato dai divisori (residui rispetto ad* E*) delle aggiunte di grado* $\deg\mathscr{C}-3$*. In particolare abbiamo che* $d(\kappa) \geqslant g-1$*, ovvero che* $\ell(\kappa) = \dim_K \Omega(0) \geqslant g$*.*

Infatti, scegliendo il sistema di coordinate come qualche riga fa, poniamo $D_\infty = \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(X_0)$ (si tratta dei d punti distinti di intersezione di $\mathscr{C}$ con la retta impropria) e sia $E_m = mD_\infty - E$. Se $\mathscr{D}$ è curva di grado $\deg\mathscr{C}-3$, allora tutti i divisori $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{D}) - E$ sono linearmente equivalenti tra loro (e sono effettivi quelli delle aggiunte di quel grado), quindi basta mostrare che $E_{d-3} = (d-3)D_\infty - E$ è un divisore canonico. L'abbiamo già mostrato: nel calcolo dell'ordine abbiamo usato il differenziale $\frac{\mathrm{d}X}{\partial f/\partial Y}$ e abbiamo visto in effetti che il suo divisore è proprio $(d-3)D_\infty - E$.

La stima sulle dimensioni è allora chiara, poiché lo spazio proiettivo delle aggiunte di $\mathscr{C}$ di grado $d-3$ è almeno

$$\binom{d-1}{2} - \frac{\deg E}{2} - 1 = g - 1$$

e la dimensione su K di $\Omega(0)$ è aumentata di 1