5.4.1. Rette. Su $\mathbb{P}^1(K)$ consideriamo il differenziale $\mathrm{d}X$ definito sulla retta affine usuale $\mathbb{P}^1(K) \smallsetminus \infty$. Naturalmente si ha $\mathrm{ord}_P(\mathrm{d}X) = 0$ per ogni $P \neq \infty$. Per controllare il comportamento su ∞, usiamo la mappa di transizione $X \mapsto 1/X$, e otteniamo che

$$\mathrm{ord}_\infty(\mathrm{d}X) = \mathrm{ord}_0\, \mathrm{d}\left(\frac{1}{X}\right) = \mathrm{ord}_0 \left(\frac{1}{X^2}\mathrm{d}X\right) = -2$$

e quindi concludiamo che esso ha grado -2. Si tratta di un differenziale non regolare. Dunque tutti i differenziali sulla retta affine hanno grado -2, e non possono esistere differenziali regolari non nulli su $\mathbb{P}^1(K)$.

Per esercizio, si consideri il differenziale definito da $\mathrm{dlog}X = \frac{\mathrm{d}X}{X}$ nella retta affine priva di ∞ (ha ordine -1 sia nell'origine che nell'infinito).

5.4.2. Curve Ellittiche. Consideriamo le curve ellittiche $\mathscr{E}$ definite da equazioni del tipo $Y^2 = X^3 - \alpha X - \beta$. Differenziando l'equazione otteniamo che $2Y\mathrm{d}Y = (3X^2 - \alpha)\mathrm{d}X$, da cui

$$\frac{\mathrm{d}X}{Y} = 2\frac{\mathrm{d}Y}{3X^2 - \alpha}$$

e si vede che il differenziale $\frac{\mathrm{d}X}{Y}$ ha ordine nullo in ogni punto del piano affine. Un facile cambiamento di coordinate affini permette di mostrare che ha ordine zero anche anche nell'unico punto improprio della curva, e quindi trattarsi di un differenziale regolare. Inoltre, tutti i differenziali sulle curve ellittiche hanno grado 0, ma non tutti sono regolari (per esempio?).

5.4.3. Curve piane lisce. Data una curva piana liscia di equazione $F(X_0, X_1, X_2)$, polinomio omogeneo di grado d maggiore di 2, consideriamo la sua equazione affine usuale $f(X,Y) = F(1,X,Y)$. Differenziando tale equazione troviamo $\frac{\partial f}{\partial X}\mathrm{d}X = -\frac{\partial f}{\partial Y}\mathrm{d}Y$, da cui possiamo dedurre che il differenziale definito da

$$\frac{\mathrm{d}X}{\partial f/\partial Y} = -\frac{\mathrm{d}Y}{\partial f/\partial X}$$

è regolare in tutti i punti del piano affine. Verifichiamo in effetti che per ogni polinomio $p(X,Y)$ di grado minore o uguale a $d-3$ il differenziale

$$p(X,Y)\frac{\mathrm{d}X}{\partial f/\partial Y}$$

è regolare. Questo è chiaro in tutti i punti affini, e bisogna controllare il comportamento nei punti impropri. Per questo consideriamo il cambiamento di coordinate affini da $(X = X_1/X_0, Y = X_2/X_0)$ a $(\zeta = X_0/X_1, \eta = X_2/X_1)$, per cui risulta che

$$X = \frac{1}{\zeta} \quad , \qquad Y = \frac{\eta}{\zeta} \quad , \qquad \mathrm{d}X = \mathrm{d}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^2}$$

e otteniamo per il nostro differenziale l'espressione

$$p(X,Y)\frac{\mathrm{d}X}{\partial f/\partial Y} = -\frac{p(\zeta,\eta)}{\zeta^r}\frac{\zeta^{d-1}}{q(\zeta,\eta)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta^2} = -\frac{p(\zeta,\eta)}{q(\zeta,\eta)}\zeta^{d-r-3}\mathrm{d}\zeta$$

ove si è posto $(\partial f/\partial Y)(\frac{1}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}) = \frac{q(\zeta,\eta)}{\zeta^{d-1}}$. Da questo si deduce appunto che l'espressione rimane regolare anche nei punti impropri solo per $d - r - 3 \geqslant 0$, ovvero per $r \leqslant d-3$.

5.4.4. Iperellittiche. Per esercizio, si consideri il caso delle curve iperellittiche di equazioni $Y^2 = h(X)$ ove $h(X)$ è polinomio privo di zeri multipli, e di grado $2g+1$ oppure $2g+2$ con $g \geqslant 1$ (nel qual caso vedremo che si tratta di curve di genere g). In particolare si dimostri che differenziali del tipo $p(X)\frac{\mathrm{d}X}{Y}$ sono regolari se $p(X)$ è polinomio di grado minore o uguale a $g-1$.

5.4.5. Rivestimenti d'ordine d della retta. Per esercizio, si esplori il caso dei rivestimenti d'ordine d della retta proiettiva nella forma $Y^d = h(X)$ con $h(X)$ polinomio di grado maggiore di d.

5.5. Spazi $\Omega(D)$. In generale, come fatto per le funzioni razionali, possiamo per ogni divisore D definire uno spazio di differenziali $\Omega(D)$ controllato da D:

$$\Omega(D) = \{\omega \in \Omega(\mathscr{C}) \ : \ \mathrm{div}(\omega) \geqslant D\}$$

(si tratta dei differenziali che possono avere poli in $\mathfrak{P}$ d'ordine $\leqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(D)$ se $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(D) < 0$, devono avere zeri d'ordine $\geqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(D)$ se $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(D) > 0$, ed essere regolari altrove).