principale: quindi tutti i divisori di differenziali sono linearmente equivalenti tra loro, e in particolare hanno tutti lo stesso grado.

5.2.1. Differenziali di prima specie, o regolari. Un differenziale $\omega \in \Omega(\mathscr{C})$ si dice di prima specie, o regolare, se il suo divisore è non negativo, cioè $\operatorname{div}(\omega) \geqslant 0$, ovvero se non presenta poli in nessun posto. I differenziali regolari formano un sotto-K-spazio vettoriale di $\Omega(\mathscr{C})$, ma non un sotto-$K(\mathscr{C})$-spazio vettoriale, che vedremo essere di dimensione finita (su K) e indicheremo con $\Omega(0)$ o $\Omega^{\rm reg}(\mathscr{C})$ se necessario.

5.3. Immagini inverse di differenziali e divisori. Data una mappa razionale $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, essa induce una applicazione K-lineare $F^* : \Omega(\mathscr{D}) \to \Omega(\mathscr{C})$ definita dal mandare $d(\psi) = 1 \otimes \psi - \psi \otimes 1$ in $d(F^*\psi) = 1 \otimes F^*\psi - F^*\psi \otimes 1$. Infatti la mappa $F^* : K(\mathscr{D}) \to K(\mathscr{C})$ induce una mappa compatibile con i prodotti $F^* \otimes F^* : K(\mathscr{D}) \otimes K(\mathscr{D}) \to K(\mathscr{C}) \otimes K(\mathscr{C})$, che si restringe ai nuclei $I(\mathscr{D}) \to I(\mathscr{C})$ e infine passa a quoziente per dare la mappa sui differenziali.

Il confronto con l'immagine inversa di divisori non è ovvio come nel caso delle funzioni razionali. Vediamo ora che se $\omega \in \Omega(\mathscr{D})$ allora

$$\operatorname{div}(F^*\omega) = F^*(\operatorname{div}\omega) + \operatorname{Ram}(F)$$

dove $\operatorname{Ram}(F) = \sum_{\mathfrak{P}} \operatorname{ram}_{\mathfrak{P}}(F)\mathfrak{P}$ *è il divisore di ramificazione di F. Di conseguenza abbiamo, passando ai gradi, che*

$$\deg \operatorname{div}(F^*\omega) = \deg(F) \deg(\operatorname{div}\omega) + \operatorname{ram}(F) \ .$$

Infatti , sia $\omega = \sum_i a_i dy_i$, $\mathfrak{Q}(T)$ un posto di $\mathscr{D}$, $\mathfrak{P}(T)$ posto di $\mathscr{C}$ con $F(\mathfrak{P}(T)) = \mathfrak{Q}(T^s)$ (quindi $s = m_{\mathfrak{P}}F$). Abbiamo allora

$$F^*\omega = F^*(\sum_i a_i dy_i) = \sum_i F^*a_i d(F^*y_i) = \sum_i a_i \circ F(\underline{T})d(F_i(\underline{T}))$$

e valutando in $\mathfrak{P}(T)$ risulta:

$$\begin{aligned}
(F^*\omega)(\mathfrak{P}(T)) &= \sum_i a_i(F(\mathfrak{P}(T)))d(F_i(\mathfrak{P}(T))) \\
&= \sum_i a_i(\mathfrak{Q}(T^s))d(\mathfrak{Q}_i(T^s)) \\
&= \sum_i a_i(\mathfrak{Q}(T^s))(d\mathfrak{Q}_i)(T^s)sT^{s-1} \\
&= \sum_i \Big(a_i(\mathfrak{Q}(S))(d\mathfrak{Q}_i)(S)\Big)_{|S=T^s} sT^{s-1} \\
&= \omega(\mathfrak{Q}(S))_{S=T^s} sT^{s-1}
\end{aligned}$$

e passando agli ordini:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ord}_{\mathfrak{P}}(F^*\omega) &= m_{\mathfrak{P}}(F)\operatorname{ord}_{F(\mathfrak{P})}\omega + m_{\mathfrak{P}}(F) - 1 \\
&= m_{\mathfrak{P}}(F)\operatorname{ord}_{F(\mathfrak{P})}\omega + \operatorname{ram}_{\mathfrak{P}}(F) \ .
\end{aligned}$$

Ora, sommando sui posti $\mathfrak{P}$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(F^*\omega) &= \sum_{\mathfrak{P}} (m_{\mathfrak{P}}(F)\operatorname{ord}_{F(\mathfrak{P})}(\omega) + \operatorname{ram}_{\mathfrak{P}}(F))\mathfrak{P} \\
&= \sum_{\mathfrak{P}} m_{\mathfrak{P}}(F)\operatorname{ord}_{F(\mathfrak{P})}(\omega)\mathfrak{P} + \sum_{\mathfrak{P}} \operatorname{ram}_{\mathfrak{P}}(F)\mathfrak{P} \\
&= \sum_{\mathfrak{Q}} \sum_{\mathfrak{P}:F(\mathfrak{P})=\mathfrak{Q}} m_{\mathfrak{P}}(F)\operatorname{ord}_{\mathfrak{Q}}(\omega)\mathfrak{P} + \sum_{\mathfrak{P}} \operatorname{ram}_{\mathfrak{P}}(F)\mathfrak{P} \\
&= (\sum_{\mathfrak{P}:F(\mathfrak{P})=\mathfrak{Q}} m_{\mathfrak{P}}(F))(\sum_{\mathfrak{Q}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{Q}}(\omega)\mathfrak{P}) + \sum_{\mathfrak{P}} \operatorname{ram}_{\mathfrak{P}}(F)\mathfrak{P} \\
&= \deg(F)F^*(\operatorname{div}(\omega)) + \operatorname{Ram}(F)
\end{aligned}$$

e passando ai gradi si arriva alla seconda formula.

5.4. Esempi. Piccoli esempi per fare esperienza.