ogni $f(\underline{T}) \in A$ abbiamo

$$\begin{aligned} d(f(\underline{T})) &= 1 \otimes f(\underline{T}) - f(\underline{T}) \otimes 1 \\ &= f(1 \otimes \underline{T}) - f(\underline{T} \otimes 1) \\ &= f(\underline{T} \otimes 1 + (1 \otimes \underline{T} - \underline{T} \otimes 1)) - f(\underline{T} \otimes 1) \\ &= f(\underline{T} \otimes 1) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial T_i}(\underline{T} \otimes 1)(1 \otimes T_i - T_i \otimes 1) - f(\underline{T} \otimes 1) \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial T_i}(\underline{T}) d(T_i) \end{aligned}$$

(nella quarta uguaglianza abbiamo usato la definizione di iperderivazioni, limitate al prim'ordine visto che il risultato è modulo I^2) dove abbiamo identificato T con $T \otimes 1$, e $1 \otimes T$ va pensato come $T + \varepsilon$...

Da questo è facile anche ottenere le formule della catena:

$$d(f(\underline{T}(\underline{S}))) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial T_i}(\underline{T}(\underline{S})) d(T_i(\underline{S}))$$

e

$$d(f(\underline{T}(S))) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial T_i}(\underline{T}(S)) d(T_i(S)) = \Big(\sum_i \frac{\partial f}{\partial T_i}(\underline{T}(S)) \frac{dT_i}{dS}(S) \Big) dS$$

(notazioni usuali).

Le stesse osservazioni si fanno per i corrispondenti corpi delle frazioni.

5.1. Differenziali sulle curve. Consideriamo ora una curva irriducibile $\mathscr{C}$, e usiamo come K-algebra il suo corpo delle funzioni razionali $K(\mathscr{C})$; poniamo $\Omega(\mathscr{C}) = \Omega(K(\mathscr{C}))$, che è chiaramente sia K-spazio vettoriale, sia $K(\mathscr{C})$-spazio vettoriale.

5.1.1. $\Omega(\mathscr{C})$ come $K(\mathscr{C})$-spazio vettoriale. *In quanto $K(\mathscr{C})$-spazio vettoriale, $\Omega(\mathscr{C})$ ha dimensione* 1 *(e quindi è di dimensione infinita come K-spazio vettoriale).*

Infatti, basta dimostrare che ogni coppia di differenziali del tipo $d\varphi$ e $d\varphi$, con $\varphi, \psi \in K(\mathscr{C})$ è linearmente dipendente su $K(\mathscr{C})$. Poiché φ e ψ sono algebricamente dipendenti, possiamo trovare un polinomio $h(U, V) \in K[U, V]$ tale che $h(\varphi, \psi) = 0$. Differenziando otteniamo

$$\frac{\partial h}{\partial U}(\varphi, \psi) d(\varphi) + \frac{\partial h}{\partial V}(\varphi, \psi) d(\psi) = 0$$

da cui (sotto l'ovvia condizione) segue che

$$d(\varphi) = -\frac{\partial_U h(\varphi, \psi)}{\partial_V h(\varphi, \psi)} d(\psi)$$

come si voleva.

5.1.2. Si è soliti dire che il rapporto di due differenziali è una funzione razionale, e se $d(\varphi) = \eta d(\psi)$ si scrive anche $\eta = \frac{d(\varphi)}{d(\psi)}$.

5.1.3. Differenziali sulle curve piane. Se una curva piana affine $\mathscr{C}$ ha equazione $f(X, Y) = 0$, allora ogni differenziale di $\mathscr{C}$ si può scrivere sia nella forma $\varphi(X, Y)dX$ che nella forma $\psi(X, Y)dY$. La relazione tra dX e dY si ottiene semplicemente differenziando l'equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial X}(X, Y) dX = -\frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y) dY \ .$$

5.2. Divisori canonici sulle curve. *Sia $\omega \in \Omega(\mathscr{C})$ un differenziale non nullo sulla curva $\mathscr{C}$; definiamo il divisore di ω, scritto* $\operatorname{div}(\omega) \in \operatorname{Div}(\mathscr{C})$ *tramite*

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_{\mathfrak{P}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{P}}(\omega) \mathfrak{P}$$

dove l'ordine di ω in $\mathfrak{P}$ è dato da $\operatorname{ord}_{\mathfrak{P}}(\omega) = \operatorname{ord}_T(f_i(\mathfrak{P}(T)) d\mathfrak{P}_i(T))$ se $\omega = f_i(\underline{T}) dT_i$ e $\mathfrak{P}(T)$ è una parametrizzazione di $\mathfrak{P}$; la definizione è chiaramente indipendente dalla parametrizzazione scelta.
Poiché il quoziente di due differenziali è una funzione razionale, la differenza dei divisori è un divisore