5. Differenziali sulle curve e divisori canonici.

5.0. Differenziali algebrici. Per arrivare al teorema di Riemann-Roch bisogna introdurre la nozione di differenziali sulle curve, e vogliamo qui farlo in modo puramente algebrico, indipendentemente dall'analoga nozione trattata in Analisi.

5.0.1. Nucleo del prodotto di K-algebre. Sia A una K-algebra (per noi di solito sarà un corpo), facciamo il prodotto tensore $A \otimes_K A$ (che risulta una K-algebra con il prodotto componente per componente, e una A-algebra in due modi diversi, usando il prodotto con elementi di A nella componente destra o sinistra), e consideriamo il prodotto come applicazione lineare $\pi : A \otimes_K A \longrightarrow A$ (con $\pi(a \otimes b) = ab$); poniamo $I = \ker(\pi)$. È facile vedere che tutti gli elementi di I si possono scrivere come combinazione lineare a coefficienti in A di elementi del tipo $1 \otimes b - b \otimes 1$ con $b \in A$; infatti se abbiamo un elemento $\sum_i a_i \otimes b_i$ nel nucleo di π, cioè $\sum_i a_i b_i = 0$, possiamo scrivere:

$$\sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i (a_i \otimes b_i - a_i b_i \otimes 1) = \sum_i (a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) = \sum_i a_i (1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)$$

(stiamo usando la struttura sinistra di A-algebra, cioè identifichiamo A con $A \otimes_C C \subseteq A \otimes_C A$ (via a in $a \otimes 1$), ovvero definiamo il prodotto per gli scalari in A tramite $a'(a \otimes b) = (a' \otimes 1)(a \otimes b) = (a'a \otimes b)$.

5.0.2. Spazio dei differenziali. Poniamo $\Omega_K(A) = I/I^2$, detto spazio dei differenziali di A. Si tratta del quoziente di I modulo il sottospazio I^2 (ideale generato dai prodotti di elementi di I). Esso ha struttura di K-spazio vettoriale e anche di A-modulo (significa che è definito un prodotto per scalari appartenenti ad A, che rispetta le usuali proprietà algebriche di compatibilità con la somma; se A è un corpo, semplicemente è un A-spazio vettoriale).

Abbiamo inoltre una applicazione K-lineare

$$d : A \longrightarrow \Omega_K(A)$$

definita da $d(a) = [1 \otimes a - a \otimes 1]$ (classe modulo I^2), detta la differenziazione di A, che gode delle seguenti proprietà:

(0) è K-lineare e $d(K) = 0$ (si annulla su K);

(1) è Leibniz rispetto al prodotto: $d(ab) = ad(b) + bd(a)$ per ogni $a, b \in A$;

(2) se $b \in A^\times$ (invertibile) allora $d(\frac{1}{b}) = -\frac{d(b)}{b^2}$ e $d(\frac{a}{b}) = \frac{bd(a)-ad(b)}{b^2}$. Questo permette di estendere unicamente d al corpo dei quozienti di A nel caso che A sia integro.

La regola di Leibniz si verifica facilmente

$$\begin{aligned} d(ab) &= 1 \otimes ab - ab \otimes 1 \\ &= 1 \otimes ab - a \otimes b + a \otimes b - ab \otimes 1 \\ &= (1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b) + (a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) \\ &= b(1 \otimes a - a \otimes 1) + a(1 \otimes b - b \otimes 1) \\ &= bd(a) + ad(b) \end{aligned}$$

tenendo conto che stiamo usando classi modulo I^2, e questo in effetti è il punto importante: nella quarta uguaglianza abbiamo $(1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b) = (b \otimes 1)(1 \otimes a - a \otimes 1)$ perché $(1 \otimes b)(1 \otimes a - a \otimes 1) = (b \otimes 1)(1 \otimes a - a \otimes 1)$ in quanto $(1 \otimes b - b \otimes 1)(1 \otimes a - a \otimes 1) = 0$ in I/I^2 (è proprio un elemento generatore di I^2); questo è legato alla (unica) struttura di A-modulo: per elementi di I/I^2 moltiplicare per $b \otimes 1$, oppure per $1 \otimes b$ dà risultati uguali (le due strutture di $A \otimes_C A$ vengono identificate).

5.0.3. Se A è K-algebra integra, possiamo usare il corpo dei quozienti e risulta $\Omega(\mathscr{Q}(A)) \cong \Omega(A) \otimes_A \mathscr{Q}(A)$?

5.0.4. Caso di polinomi e serie. Nel caso in cui A sia $K[\underline{T}]$ (oppure $K[\![\underline{T}]\!]$, oppure $K[\![\underline{T}]\!]$) possiamo collegare il calcolo dei differenziali in A al calcolo delle derivazioni nel modo seguente: per