4.1.1. Si usa spesso anche la disuguaglianza nella forma $d(D) \geqslant \deg(D) - g(\mathscr{C})$ (condizione affinché il sistema lineare sia non vuoto), o anche con la dimensione dello spazio delle funzioni razionali corrispondente: $\deg(D) - \ell(D) \leqslant g(\mathscr{C}) - 1$ e $\ell(D) \geqslant \deg(D) - g(\mathscr{C}) + 1$.

Una espressione classica per la disuguaglianza di Riemann è la seguente: dato un g^r_n completo di $\mathscr{C}$, allora $r \geqslant n - g$, ovvero $n - r \leqslant g$.

4.1.2. Per la dimostrazione è sufficiente considerare il caso di sistemi lineari completi G formati dalle intersezioni di $\mathscr{C}$ con aggiunte di grado $m \geqslant \deg\mathscr{C}$ (tolto il divisore aggiunto). Infatti ogni sistema lineare completo G' è residuo di un tale sistema G rispetto ad un divisore effettivo B, e la disuguaglianza si conserva poiché $\deg(G') = \deg(G) - \deg(B)$ e $d(G') \geqslant d(G) - \deg(B)$, da cui $\deg(G') - d(G') \leqslant \deg(G) - d(G)$.

Consideriamo allora il sistema completo delle intersezioni di $\mathscr{C}$ con aggiunte di grado $m \geqslant \deg\mathscr{C}$. Detto $d = \deg(\mathscr{C})$, tali divisori hanno grado $n = md - \deg(E)$. Vogliamo stimarne la dimensione. Lo spazio vettoriale delle aggiunte in questione ha dimensione almeno

$$R \geqslant \binom{m+2}{2} - \frac{\deg(E)}{2}$$

e d'altra parte le aggiunte contenenti $\mathscr{C}$ sono in corrispondenza con le curve di grado $m - d$; quindi la dimensione proiettiva cercata è

$$\begin{aligned} r &= R - \binom{m-d+2}{2} - 1 \\ &\geqslant \binom{m+2}{2} - \binom{m-d+2}{2} - 1 - \frac{\deg(E)}{2} \\ &= md - \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{\deg(E)}{2} \\ &= n - \frac{(d-1)(d-2)}{2} + \frac{\deg(E)}{2} \end{aligned}$$

da cui si ricava subito che

$$n - r \leqslant \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{\deg(E)}{2}$$

che è proprio la deficienza della curva $\mathscr{C}$. □

4.2. Calcolo del genere per curve ordinarie. Come calcolare il genere della curva $\mathscr{C}$, ovvero la minima costante che rende vero il teorema di Riemann? Poiché si tratta chiaramente di una nozione birazionale possiamo sempre (per proiezione) pensare che la curva sia piana e abbia singolarità ordinarie. In questo caso in effetti il genere coincide con la deficienza: ragionando per aggiunte di grado abbastanza elevato... ???

4.2.1. Formula genere-grado per curve piane lisce. In particolare curve piane lisce (non singolari) hanno genere che dipende solo dal loro grado: $g(\mathscr{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Quindi abbiamo la seguente tabella grado-genere:

grado	1	2	3	4	5	6	7	8	···
genere	0	0	1	3	6	10	15	21	···

da cui si nota che rette e coniche sono entrambe di genere zero (curve razionali), e che non esistono curve piane lisce di generi $2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots$. Vedremo comunque in futuro che esistono curve algebriche proiettive lisce immerse in qualche $\mathbb{P}^n$ (anche con $n = 3$) di ogni genere.

4.2.2. Tuttavia esistono curve piane (non lisce) di ogni genere: si può vedere facilmente considerando curve di equazioni $Y^2 a(X) = b(X)$ con $a(X)$ e $b(X)$ polinomi di gradi g e $g + 2$ rispettivamente. Con opportune (e generiche) condizioni su tali polinomi si verifica che si tratta di curve irriducibili con un unico punto singolare g-uplo ordinario; quindi il genere risulta esattamente $\frac{(g+1)g}{2} - \frac{g(g-1)}{2} = g$.

4.2.3. Vedremo in futuro (dal teorema di Riemann-Hurwitz) come calcolare il genere di una curva piana singolare qualsiasi, senza doverla prima modificare (trasformarla birazionalmente) in una curva ordinaria, cosa spesso non agevole.