3.3.2. Rimozione dei punti base. Se $D \in \mathrm{Div}(\mathscr{C})$ e $F = B(D)$, allora $\mathscr{L}(D) = \mathscr{L}(D - F)$ e il divisore $D - F$ non ha punti base.

3.4. Divisore aggiunto e curve aggiunte. Data una curva piana ordinaria $\mathscr{C}$, consideriamo i suoi posti con centro singolare, e per ogni tale posto $\mathfrak{P}$ sia $r_{\mathfrak{P}} = m_{\mathfrak{P}(0)}$ la molteplicità del suo centro come punto di $\mathscr{C}$. *Definiamo allora il divisore aggiunto di $\mathscr{C}$, indicato con $E(\mathscr{C})$ o semplicemente E se la curva può essere sottintesa, tramite*

$$E = E(\mathscr{C}) = \sum_{\mathfrak{P}} (r_{\mathfrak{P}} - 1)\mathfrak{P}$$

(notare che la somma è estesa ai posti di $\mathscr{C}$, ma il coefficiente è nullo per tutti i posti con centro non singolare, quindi quasi sempre). Risulta che

$$\deg(E) = \sum_P m_P(m_P - 1)$$

(somma sui punti singolari di $\mathscr{C}$).

Diciamo inoltre che che una curva piana $\mathscr{D}$ è aggiunta di $\mathscr{C}$ se $\mathscr{C} \cdot \mathscr{D} \geqslant E(\mathscr{C})$, cioè il divisore di intersezione con $\mathscr{C}$ contiene il divisore aggiunto di $\mathscr{C}$. Naturalmente, segue subito che se $\mathscr{C}$ è liscia, allora ogni curva ne è aggiunta.

3.4.1. Criterio di aggiunzione. Dal teorema di Noether segue subito che *una curva $\mathscr{D}$ è aggiunta di $\mathscr{C}$ se e solo se ogni punto r-uplo di $\mathscr{C}$ è punto almeno $(r-1)$-uplo di $\mathscr{D}$.*

Infatti...

3.4.2. Teorema sulle intersezioni residue. *Se $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ sono due aggiunte di grado m di $\mathscr{C}$ tali che $\mathscr{C} \cdot \mathscr{D} = A + B + E$ e $\mathscr{C} \cdot \mathscr{D}' = A' + B + E$, allora esiste una aggiunta $\mathscr{E}$ di grado l tale che $\mathscr{C} \cdot \mathscr{E} = A + B' + E$ se e solo se esiste una aggiunta $\mathscr{E}'$ di grado l tale che $\mathscr{C} \cdot \mathscr{E}' = A' + B' + E$.*

Anche questo discende facilmente dal teorema di Noether: confondendo curve ed equazioni, possiamo considerare $\mathscr{E}\mathscr{D}'$ e dedurre l'esistenza di $\mathscr{E}'$ (di grado pari a quello di $\mathscr{E}$) tale che $\mathscr{E}\mathscr{D}' = \mathscr{E}'\mathscr{D} + \mathscr{C}'\mathscr{C}$. Ora abbiamo che $(\mathscr{E}\mathscr{D}') \cdot \mathscr{C} = A + B + A' + B' + 2E$, e $\mathscr{C} \cdot \mathscr{D} = A + B + E$, da cui si deduce che $\mathscr{C} \cdot \mathscr{E}' = A' + B' + E$.

3.4.3. Equivalenza lineare e aggiunzione. *Dati due divisori effettivi A, A' di $\mathscr{C}$ linearmente equivalenti, esiste una aggiunta $\mathscr{D}$ di grado l tale che $\mathscr{C} \cdot \mathscr{D} = A + B + E$ se e solo se esiste una aggiunta $\mathscr{D}'$ di grado l tale che $\mathscr{C} \cdot \mathscr{D}' = A' + B + E$.*

Infatti, basta considerare una funzione razionale $\vartheta = \frac{g}{g'}$ su $\mathscr{C}$, con g, g' omogenei di grado m che diano aggiunte di $\mathscr{C}$, tale che $A - A' = \mathrm{div}\vartheta = \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(g) - \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(g')$. Abbiamo allora due curve $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ definite da g, g' per cui $\mathscr{C} \cdot \mathscr{E} = A + B' + E$ e $\mathscr{C} \cdot \mathscr{E}' = A' + B' + E$, e si può applicare il risultato precedente.

3.4.4. Serie residue e serie complete. Dato un sistema lineare G di $\mathscr{C}$, e fissato un divisore effettivo A, allora l'insieme $G - A := \{B \geqslant 0 \mid A + B \in G\}$ è un sistema lineare (eventualmente vuoto!), detto residuo di G rispetto ad A, e risulta completo se G lo era (in tal caso, $G = |D|$ e $G - A = |D| - A = |D| - |A|$ dipende solo da $|A|$ e si dice il residuo di $|D|$ rispetto ad $|A|$).

Per ogni divisore effettivo $A \geqslant 0$ di $\mathscr{C}$, se esiste una aggiunta di $\mathscr{C}$ di grado m tale che il ciclo intersezione con $\mathscr{C}$ sia $A + B + E$, allora il sistema completo $|A|$ è il residuo rispetto a $B + E$ del sistema lineare formato dai divisori di intersezione di $\mathscr{C}$ con tutte le curve di grado m (o con tutte le aggiunte di grado m contenenti B, ovviamente).

4. Genere delle curve (teorema di Riemann).

4.1. Teorema di Riemann (Genere). *Per ogni divisore D di $\mathscr{C}$ abbiamo che la differenza tra il grado e la dimensione è limitata da una fissata costante (dipendente da $\mathscr{C}$ ma non da D):*

$$\deg(D) - d(D) \leqslant g(\mathscr{C}) \ .$$

Inoltre tale costante è minore o uguale al difetto $i(\mathscr{C})$ della curva; definiamo il genere $g(\mathscr{C})$ della curva $\mathscr{C}$ come la minima costante che rende vera la disuguaglianza scritta; quindi $g(\mathscr{C}) \leqslant i(\mathscr{C})$ (il genere è non maggiore della deficienza).