Possiamo quindi concludere che gli spazi $\mathscr{L}(D)$ sono di dimensione finita su K: si può supporre $D \geqslant 0$ (altrimenti non vi sono divisori effettivi linearmente equivalenti a D, e la dimensione di $\mathscr{L}(D)$ è nulla) e allora abbiamo $\deg(0)-\ell(0) \leqslant \deg(D)-\ell(D)$, da cui $\ell(D) \leqslant \deg(D)+1$, ovvero $d(D) \leqslant \deg(D)$.

(4) Le operazioni di reticolo dei divisori (inf e sup di divisori) tramite $\mathscr{L}$ corrispondono alle operazioni di reticolo di sottospazi di $K(\mathscr{C})$ (intersezione e somma di sottospazi)?

3.1.4. La funzione che ad ogni divisore associa il suo sistema lineare completo sembra piuttosto semplice: per divisori con sistema non vuoto si ha che i sistemi lineari sono uguali se e solo se i divisori sono linearmente equivalenti. In particolare è ben definita sulle classi di divisori.

Invece la funzione che ad ogni divisore associa lo spazio $\mathscr{L}(D)$ sembra meno precisa: divisori equivalenti danno luogo a spazi isomorfi, ma il viceversa è in generale falso. Si può tuttavia mettere in evidenza una mappa in senso inverso: dato un sotto-K-spazio vettoriale di dimensione finita L di $K(\mathscr{C})$ definiamo un divisore $D(L)$ come $-\inf(\mathrm{div}L)$ (l'opposto dell'inf dei divisori di L: naturalmente basta calcolarlo su una base di L come K-spazio vettoriale, e per questo il divisore è ben definito). È chiaro che inclusioni di sottospazi danno maggiorazioni dei divisori corrispondenti, e quindi potremmo trovare una biiezione tra una certa classe di divisori e una certa classe di sottospazi.

D'altro lato, se per ogni divisore D definiamo $\tilde{D} = D(\mathscr{L}(D))$ abbiamo che $\tilde{D} \leqslant D$, e per ogni $\tilde{D} \leqslant D' \leqslant D$ risulta che $\mathscr{L}(\tilde{D}) = \mathscr{L}(D') = \mathscr{L}(D)$.

3.2. Sistemi lineari definiti da famiglie lineari di ipersuperficie. Se consideriamo il sottospazio proiettivo delle ipersuperficie di fissato grado generato da $\mathscr{H}_0, \ldots, \mathscr{H}_s$, l'insieme di divisori definito da $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$ è formato da divisori positivi tutti linearmente equivalenti che danno luogo ad un sistema lineare di divisori contenuto nel sistema lineare completo di $D_0 = \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}_0)$ e corrispondente al sottospazio di $\mathscr{L}(D_0)$ generato (ma sono necessariamente indipendenti?) dalle funzioni razionali $1, \frac{g_1}{g_0}, \ldots, \frac{g_s}{g_0}$ (se g_i è equazione per $\mathscr{H}_i$ per ogni i).

Naturalmente è possibile che il sistema lineare delle ipersuperficie abbia dei punti base sulla curva $\mathscr{C}$, nel qual caso tutti i divisori del sistema conterranno quei punti.

Inoltre, è possibile che i generatori prima scritti non fossero indipendenti, nel qual caso si verifica questa situazione (curve inutili in un sistema lineare?): ???

3.2.1. Viceversa, dato un sistema lineare non vuoto di divisori, mostriamo che esso si può essenzialmente ottenere come sistema di divisori di intersezione con una famiglia lineare di ipersuperficie. Possiamo supporre $G \subseteq |D|$ con $D \geqslant 0$ e $D \in G$. Consideriamo il sottospazio V di $\mathscr{L}(D)$ corrispondente a G, e sia $\varphi_0, \ldots, \varphi_s$ una sua base, in cui possiamo supporre $\varphi_0 = 1$. Scriviamo $\varphi_i = \frac{g_i}{g_0}$ con g_i omogenei dello stesso grado (basta fare il denominatore comune delle funzioni razionali φ_i). Allora il sistema lineare di ipersuperficie generato dalle $\mathscr{H}_i$ di equazioni g_i interseca $\mathscr{C}$ in un sistema di divisori da cui il sistema G si ottiene sottraendo $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}_0) - D$ ad ogni divisore $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H})$. Infatti i divisori del sistema sono della forma $D + \mathrm{div}(\varphi)$ per $\varphi \in \langle \varphi_0, \ldots, \varphi_s \rangle$, quindi si scrivono nella forma $D + \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) - \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}_0) = \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) - (\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}_0) - D)$ per $\mathscr{H}$ di equazione $g \in \langle g_0, \ldots, g_s \rangle$.

Naturalmente, i punti di $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}_0) - D$ sono del ciclo base su $\mathscr{C}$ del sistema di ipersuperficie?

3.2.2. Si osservi infine che le costruzioni precedenti dipendono fortemente dalla scelta di un divisore D nel sistema lineare. Diversi sistemi linerari di ipersuperficie possono intersecare $\mathscr{C}$ nello stesso sistema lineare di divisori, e per questo motivo l'uso degli spazi vettoriali di funzioni razionali è più agevole da un punto di vista tecnico, mentre l'uso dei divisori di intersezione con ipersuperficie è più vicino all'intuizione geometrica.

3.3. Punti base di sistemi lineari. Sia $D \in \mathrm{Div}(\mathscr{C})$. Definiamo il divisore di base di D, o l'insieme dei posti base di D, come $B(D) = \inf\{E \ : \ E \in |D|\} = \bigcap_{E\in|D|} E$. Si tratta del divisore formato dai posti che appartengono ad ogni divisore del sistema lineare $|D|$ (stiamo confondendo il divisore $B(D)$ con il suo supporto).

È facile vedere che $\mathfrak{P} \in B(D)$ se e solo se $\mathscr{L}(D-\mathfrak{P}) = \mathscr{L}(D)$, e anche se e solo se $\ell(D-\mathfrak{P}) = \ell(D)$ (ovvero $d(D-\mathfrak{P}) = d(D)$).

Di conseguenza, D non ha punti base (cioè $B(D) = 0$, ovvero supporto vuoto) se e solo se per ogni $\mathfrak{P} \in \mathscr{C}$ si ha che $\ell(D-\mathfrak{P}) = \ell(D) - 1$.

3.3.1. Per un sistema lineare generico $G \leqslant |D|$, definiamo il divisore di base di G, o l'insieme dei posti base di G, come $B(G) = \inf\{E \ : \ E \in G\} = \bigcap_{E\in G} E$. Si verifica allora che $\mathfrak{P} \in B(G)$ se e solo se G ha come sovrastante uno spazio vettoriale $V \leqslant \mathscr{L}(D)$ tale che $V \leqslant \mathscr{L}(D-\mathfrak{P})$.