(4) se $\varphi : \mathscr{C} \to \mathbb{P}^1(K)$ è mappa razionale, allora tutte le fibre $\varphi^*\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{P}^1(K)$ sono tra loro linearmente equivalenti. Quest'ultima proprietà giustifica il nome di equivalenza lineare usato: si tratta di "sezioni lineari" di mappe razionali verso la retta proiettiva.

2.6.3. Per curve algebriche in $\mathbb{P}^n(K)$, tra le famiglie di divisori linearmente equivalenti tra loro troviamo le "sezioni iperpiane" della curva, cioè i divisori tagliati sulla curva dagli iperiani dello spazio proiettivo.

3. Sistemi lineari (di divisori) sulle curve.

3.1. Sistemi lineari di divisori. *Sia $D \in \mathrm{Div}(\mathscr{C})$ un divisore su una curva algebrica $\mathscr{C}$. L'insieme*

$$|D| = \{E \in \mathrm{Div}(\mathscr{C}) \ : \ E \geqslant 0, \quad E \sim D\}$$

dei divisori non negativi linearmente equivalenti a D si dice sistema lineare completo di D e ha struttura di spazio proiettivo su K, con K-spazio vettoriale sovrastante $\mathscr{L}(D)$ dato da

$$\mathscr{L}(D) = \{\varphi \in K(\mathscr{C}) \ : \ \mathrm{div}(\varphi) + D \geqslant 0\}$$

(si tratta delle funzioni razionali che possono avere poli in $\mathfrak{P}$ d'ordine $\leqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(D)$ se $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(D) > 0$, devono avere zeri d'ordine $\geqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(D)$ se $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(D) < 0$, ed essere regolari altrove). In particolare abbiamo $\dim |D| = \dim_K \mathscr{L}(D) - 1$.

Ogni sottovarietà lineare proiettiva di $|D|$ si dice un sistema lineare.

L'unica asserzione da verificare riguarda la struttura di spazio proiettivo, e si dimostra osservando che l'applicazione

$$\mathbb{P}(\mathscr{L}(D)) \longrightarrow |D| \qquad \text{definita da} \qquad f \longmapsto \mathrm{div}(f) + D$$

è ben definita e chiaramente una biiezione.

Perché nella definizione siamo interessati ai divisori effettivi?

3.1.1. Grado e dimensione di sistemi lineari. Dato un sistema lineare $G \leqslant |D|$, diciamo dimensione di G la sua dimensione come sottospazio proiettivo, e grado di G il grado di un qualunque suo elemento (hanno tutti lo stesso grado, trattandosi di divisori linearmente equivalenti tra loro).

3.1.2. Terminologia sui sistemi lineari. Classicamente un sistema lineare di dimensione r e grado n sulla curva $\mathscr{C}$ viene detto "un g^r_n di $\mathscr{C}$". Eviteremo questa terminologia.

Useremo invece queste notazioni: se D è un divisore, $\ell(D) = \dim_K \mathscr{L}(D)$ (dimensione come spazio vettoriale su K), $d(D) = \dim |D|$ (dimensione come spazio proiettivo, quindi $d(D) = \ell(D) - 1$), $\deg(D)$ è il grado di D. Di solito ci occuperemo di sistemi lineari completi, ma in ogni caso le stesse notazioni si usano per un sistema lineare G qualsiasi: $\ell(G)$, $d(G)$, $\deg(G)$.

3.1.3. Osservazioni.

(0) Usando il divisore nullo, troviamo che $\mathscr{L}(0) = K$ e $|0| = \{0\}$. Quindi $\ell(0) = 1$ e $d(0) = 0$.
Risulta subito che $\mathscr{L}(D) \geqslant K$ se e solo se $D \geqslant 0$.
Se $\deg(D) < 0$ allora $\mathscr{L}(D) = \{0\}$ (abbiamo imposto che le funzioni abbiano più zeri di quanti poli siano permessi) e quindi $|D| = \varnothing$. Cioè $\ell(0) = 0$ e $d(0) = -1$.

(1′) Se $D \sim D'$ (linearmente equivalenti), allora $|D| = |D'|$ (proprio uguali); il viceversa vale se i sistemi lineari non sono vuoti: se $|D| = |D'| \neq \varnothing$ allora $D \sim D'$.

(1) Se $D \sim D'$ (linearmente equivalenti), allora abbiamo un isomorfismo $\mathscr{L}(D) \to \mathscr{L}(D')$ di K-spazi vettoriali definito da $\varphi \mapsto \varphi\psi$ se $D - D' = \mathrm{div}(\psi)$ (cioè indotto dalla moltiplicazione per un elemento non nullo di $K(\mathscr{C})$), e quindi $\ell(D) = \ell(D')$ e $d(D) = d(D')$. Si noti che la corrispondente proiettività $|D| \to |D'|$ manda E in $E + \mathrm{div}(\psi)$ (non è l'identità).
Si osservi anche che il viceversa del risultato detto è falso: se abbiamo un isomorfismo di K-spazi vettoriali $\mathscr{L}(D) \to \mathscr{L}(D')$, fosse anche indotto dalla moltiplicazione per un elemento non nullo di $K(\mathscr{C})$, non è detto che D e D' siano equivalenti.

(2) Se $D \leqslant D'$ allora risulta $\mathscr{L}(D) \leqslant \mathscr{L}(D')$ (viceversa falso), quindi $\ell(D) \leqslant \ell(D')$ e $d(D) \leqslant d(D')$. Si osservi che la corrispondente "inclusione" $|D| \leqslant |D'|$ manda E in $E + (D' - D)$.

(3) Inoltre, $\ell(D') - \ell(D) = d(D') - d(D) \leqslant \deg(D') - \deg(D)$ da cui $\deg(D) - \ell(D) \leqslant \deg(D') - \ell(D')$. Si procede infatti per induzione dal confronto di D con $D' = D + \mathfrak{P}$, in cui la differenza delle dimensioni è 0 oppure 1: $\ell(D + \mathfrak{P}) - \ell(D) = d(D + \mathfrak{P}) - d(D) \in \{0, 1\}$.