definita sui posti da $F^*(\mathfrak{Q}) = \sum_{\mathfrak{P}\in X,\ f(\mathfrak{P})=\mathfrak{Q}} m_{\mathfrak{P}}(F)\mathfrak{P}$, e poi estesa per linearità ai divisori: se $D = \sum_{\mathfrak{Q}\in Y} \mathrm{ord}_{\mathfrak{Q}}(D)\mathfrak{Q}$, allora $F^*D = \sum_{\mathfrak{Q}\in Y} \mathrm{ord}_{\mathfrak{Q}}(D)F^*(\mathfrak{Q})$.

2.4.1. Composizione. Si tratta chiaramente di un morfismo di gruppi abeliani, e risulta $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, e $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.

2.4.2. Risulta che $\deg(F^*D) = \deg(F)\deg(D)$. Dunque F^* si restringe ad una mappa di gruppi $F^* : \mathrm{Div}_0(\mathscr{D}) \to \mathrm{Div}_0(\mathscr{C})$.

2.4.3. Immagini inversa di divisori principali. Se φ è funzione razionale su $\mathscr{D}$, allora $F^*(\varphi) = \varphi \circ F$ lo è su $\mathscr{C}$, e abbiamo che $F^*(\mathrm{div}\varphi) = \mathrm{div}(F^*(\varphi))$. Cioè immagine inversa (per funzioni razionali e divisori) commutano tra loro, e abbiamo una ben definita mappa di gruppi $F^* : \mathrm{PDiv}(\mathscr{D}) \to \mathrm{PDiv}(\mathscr{C})$.

2.4.4. Immagini inversa di divisori di intersezione. Se $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ è una mappa razionale di curve, restrizione a $\mathscr{C}$ di una mappa razionale $F : \mathbb{P}^n(K) \to \mathbb{P}^m(K)$, per ogni ipersuperficie $\mathscr{H}$ (di equazione g) del codominio abbiamo che $F^*(\mathscr{H})$ è ipersuperficie (di equazione $g \circ F$) del dominio. Si trova allora che $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(F^*\mathscr{H}) = F^*(\mathrm{div}_{\mathscr{D}}\mathscr{H})$.

2.5. Problemi di esistenza. I problemi fondamentali di cui ci occuperemo, e che danno luogo a risultati estremamente importanti per comprendere la geometria intrinseca delle curve, sono del tipo seguente:

2.5.1. Quali divisori sono divisori di intersezione di $\mathscr{C}$ con qualche ipersuperficie?

2.5.2. Quali divisori sono divisori di funzioni razionali su $\mathscr{C}$?

2.5.3. È chiaro che una famiglia di ipersuperficie "taglia" su $\mathscr{C}$ una collezione di divisori con particolari proprietà. Viceversa, quali famiglie di divisori si possono ottenere con questa costruzione?

2.5.4. D'altro lato è chiaro che una famiglia di funzioni razionali "taglia" su $\mathscr{C}$ una collezione di divisori di grado zero. Viceversa, quali famiglie di divisori si possono ottenere con questa costruzione?

Nel seguito si cercherà sempre di far vedere la relazione tra i problemi presentati: per studiare una curva si studiano da un lato le funzioni razionali su di essa, dall'altra le sue intersezioni con ipersuperficie; in entrambi i casi si definiscono dei divisori sulla curva, e le famiglie di questi divisori tendono a caratterizzare la curva stessa. Si vedrà che alcuni risultati si scrivono meglio in termini di divisori di (famiglie di) funzioni razionali, mentre altri in termini di (famiglie di) divisori di intersezione. Conviene sempre comunque tenere presenti i due punti di vista e integrarli tra loro: studiare una curva studiando la sua relazione con le ipersuperficie (le altre curve, se è piana), oppure studiando le funzioni razionali su di essa.

2.6. Equivalenza lineare di divisori: gruppo di Picard. *Diciamo che due divisori sono linearmente equivalenti, e scriviamo $D \sim D'$ se $D - D' \in \mathrm{PDiv}(\mathscr{C})$, ovvero se e solo se la differenza è il divisore di una funzione razionale.*

Osserviamo subito che due divisori sono equivalenti se e solo se esistono due ipersuperficie dello stesso grado $\mathscr{H}$ e $\mathscr{H}'$ tali che $D + \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) = D' + \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}')$.

Chiamiamo gruppo di Picard di $\mathscr{C}$ (o gruppo delle classi di divisori) il gruppo quoziente

$$\mathrm{Pic}(\mathscr{C}) = \frac{\mathrm{Div}(\mathscr{C})}{\mathrm{PDiv}(\mathscr{C})}$$

dei divisori modulo divisori principali.

2.6.1. Si osserva subito che divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado, ma di solito il viceversa è falso (divisori dello stesso grado non sono necessariamente linearmente equivalenti: esempi?). Spesso si usa anche il quoziente $\mathrm{Pic}_0(X) = \dfrac{\mathrm{Div}_0(X)}{\mathrm{PDiv}(X)}$, che è un sottogruppo di $\mathrm{Pic}(X)$.

2.6.2. Proprietà dell'equivalenza lineare.

(1) $\mathrm{div}_0(\varphi) \sim \mathrm{div}_\infty(\varphi)$ per ogni $\varphi \in K(\mathscr{C})$;
(1′) $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) \sim \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}')$ per ogni coppia di ipersuperficie $\mathscr{H}, \mathscr{H}'$ dello stesso grado;
(2) nel caso della retta proiettiva si ha che $P \sim Q$ per ogni $P, Q \in \mathbb{P}^1(K)$; dunque $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1(K)) \cong \mathbb{Z}$ via l'applicazione deg;
(3) se $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ è mappa razionale, allora da $D \sim D'$ segue che $F^*D \sim F^*D'$; infatti $D - D' = \mathrm{div}(\varphi)$ implica che $F^*D - F^*D' = \mathrm{div}(F^*\varphi)$, oppure perché abbiamo già detto che F^* rispetta PDiv. Quindi F^* induce una mappa di gruppi $\mathrm{Pic}(\mathscr{D}) \to \mathrm{Pic}(\mathscr{C})$;