2.1.1. Definizione (Divisori sulle curve). *Il gruppo dei divisori sulla curva algebrica $\mathscr{C}$ è il gruppo abeliano libero generato dai posti di $\mathscr{C}$:*

$$\mathrm{Div}(\mathscr{C}) = \mathbb{Z}^{(\mathrm{posti}(\mathscr{C}))} = \{D : \textit{posti}(\mathscr{C}) \to \mathbb{Z} \ : \ \textit{quasi ovunque nulle}\} \ .$$

Se $D \in \mathrm{Div}(\mathscr{C})$, scriviamo

$$D = \sum_{\mathfrak{P} \in \mathrm{posti}(\mathscr{C})} D_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}$$

e anche $D_{\mathfrak{P}} = \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}} D$ (ordine in $\mathfrak{P}$ di D), che è un intero, nullo per quasi tutti i posti $\mathfrak{P} \in X$. Si dice supporto del divisore D l'insieme $\{\mathfrak{P} \in X \ : \ \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(D) \neq 0\}$.

2.1.2. Ordine tra divisori. Se $D, D' \in \mathrm{Div}(\mathscr{C})$ diciamo che $D \leqslant D'$ se e solo se per ogni posto $\mathfrak{P} \in \mathscr{C}$ si ha $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}} D \leqslant \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}} D'$. Si chiamano divisori positivi, o effettivi, i divisori D tali che $D \geqslant 0$, cioè con $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}} D \geqslant 0$ per ogni $\mathfrak{P} \in \mathscr{C}$.

2.1.3. Grado di divisori. Il grado dei divisori è la funzione

$$\deg : \mathrm{Div}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

definita da $\deg(D) = \sum_{\mathfrak{P} \in X} \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}} D$ (ben definita per la finitezza di D). Si tratta chiaramente di un morfismo suriettivo di gruppi, e il nucleo si indica con

$$\mathrm{Div}_0(\mathscr{C}) = \ker(\deg) = \{D \in \mathrm{Div}(\mathscr{C}) \ : \ \deg(D) = 0\}$$

e si chiama il sottogruppo dei divisori di grado zero.

2.2. Divisori di intersezione. Dato un ipersuperficie $\mathscr{H}$ di equazione $g(\underline{X}) = 0$, definiamo il divisore di intersezione di $\mathscr{C}$ con $\mathscr{H}$ come il divisore $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) = \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(g) = \sum_{\mathfrak{P}} m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{H})\mathfrak{P}$ dove naturalmente $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{H}) = \mathrm{ord}_T(g(\mathfrak{P}(T)))$ è un intero non negativo (quasi sempre nullo). Si ottengono in questo modo dei divisori positivi che sono detti divisori di intersezione. Il loro grado è il prodotto del grado di $\mathscr{C}$ con il grado dell'ipersuperficie: in particolare tutte le ipersuperficie dello stesso grado intersecano $\mathscr{C}$ in divisori dello stesso grado.

2.2.1. Naturalmente abbiamo $\mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H} \cup \mathscr{H}') = \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}) + \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(\mathscr{H}')$.

2.3. Divisori di funzioni razionali (divisori principali). Abbiamo un morfismo di gruppi abeliani

$$\mathrm{div} : K(\mathscr{C}) \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathrm{Div}(\mathscr{C})$$

che manda ogni funzione razionale φ nel suo divisore $\mathrm{div}(\varphi) = \sum_{\mathfrak{P} \in \mathscr{C}} \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\varphi)\mathfrak{P}$ ove $\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\varphi) = \mathrm{ord}_T(\varphi(\mathfrak{P}(T)))$ (spesso si estende alla funzione nulla dando come valore il "divisore" ∞).

Scrivendo $\varphi = \frac{g_1}{g_0}$ come quoziente di polinomi omogenei dello stesso grado, si vede subito che $\mathrm{div}(\varphi) = \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(g_1) - \mathrm{div}_{\mathscr{C}}(g_0)$, e quindi i divisori di funzioni razionali sono divisori di grado zero, e il divisore nullo si ottiene solo per funzioni costanti (non nulle).

Risulta quindi $\ker(\mathrm{div}) = K^\times$ (funzioni costanti non nulle), e definiamo divisori principali quelli dell'immagine, cioè poniamo

$$\mathrm{PDiv}(\mathscr{C}) = \mathrm{im}\,(\mathrm{div}) = \{\mathrm{div}(\varphi) \in \mathrm{Div}(\mathscr{C}) \ : \ \varphi \in K(\mathscr{C})^\times\} \ .$$

Si tratta di un sottogruppo di $\mathrm{Div}_0(\mathscr{C})$ (poiché per ogni funzione razionale non nulla abbiamo $\deg \mathrm{div}(\varphi) = 0$, in quanto $\sum_{\mathfrak{P}} \mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\varphi) = 0$); di solito si tratta di un sottogruppo proprio.

2.3.1. Talvolta si usa la notazione $\mathrm{div}(\varphi) = \mathrm{div}_0(\varphi) - \mathrm{div}_\infty(\varphi)$, dove $\mathrm{div}_0(\varphi)$ e $\mathrm{div}_\infty(\varphi)$ sono detti rispettivamente divisori di zero e di infinito (o dei poli) di φ, e sono definiti dal fatto di essere entrambi positivi a supporti disgiunti e di dare come differenza il divisore della funzione.

2.3.2. Divisori della retta proiettiva. Nel caso $\mathscr{C} = \mathbb{P}^1(K)$, considerando che $K(\mathbb{P}^1(K)) = K(X)$ possiamo subito vedere che ogni divisore di grado zero è il divisore di una funzione razionale. Per motivare queste definizioni anticipiamo che questa proprietà caratterizza tutte e sole le curve birazionalmente equivalenti alla retta proiettiva.

2.4. Immagine inversa di divisori. Se $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ è una mappa razionale di curve, definiamo l'immagine inversa di divisori tramite F come l'applicazione

$$F^* : \mathrm{Div}(\mathscr{D}) \longrightarrow \mathrm{Div}(\mathscr{C})$$