sottinsieme di $K(\mathscr{C})$ formato dagli elementi definiti in P si chiama anello locale di P in $\mathscr{C}$: si indica con $\mathscr{O}_P(\mathscr{C})$, ed è un sottoanello di $K(\mathscr{C})$ contenente $K[\mathscr{C}]$.

1.7.1. La funzione $\mathscr{O}_P(\mathscr{C}) \to K$ di valutazione in P definita da $f = a/b \mapsto a(P)/b(P) =: f(P)$ è ben definita, e il suo nucleo si indica con $\mathscr{M}_P(\mathscr{C})$: è l'unico ideale massimale di $\mathscr{O}_P(\mathscr{C})$, formato da tutti gli elementi che si annullano in P; gli elementi del complementare sono invertibili in $\mathscr{O}_P(\mathscr{C})$.

Dunque $\mathscr{O}_P(\mathscr{C})$ è anello locale (significa che ha un unico ideale massimale) e noetheriano (significa che i suoi ideali sono finitamente generati) con ideale massimale $\mathscr{M}_P(\mathscr{C})$ e corpo residuo (quoziente dei due) isomorfo a K.

1.7.2. Risulta che per ogni P abbiamo $\mathscr{Q}(\mathscr{O}_P(\mathscr{C})) = K(\mathscr{C})$. Inoltre l'anello delle coordinate della curva è l'intersezione di tutti gli anelli locali: $K[\mathscr{C}] = \bigcap_{P\in\mathscr{C}} \mathscr{O}_P(\mathscr{C})$.

1.7.3. L'anello locale di $\mathscr{C}$ in P contiene tutte le informazioni sulle proprietà locali della curva $\mathscr{C}$ che dipendono solo da un intorno di P. Facciamo solo alcuni esempi di questo principio:

(1) un punto P è non singolare per $\mathscr{C}$ se e solo se l'ideale $\mathscr{M}_P(\mathscr{C})$ è principale, e in tal caso l'immagine in $\mathscr{O}_P(\mathscr{C})$ dell'equazione di una qualsiasi retta per P diversa dalla tangente a $\mathscr{C}$ in P è un generatore dell'ideale massimale; di solito si dice che $\mathscr{O}_P(\mathscr{C})$ è un anello di valutazione discreta, poiché la condizione che il suo ideale massimale sia principale equivale al fatto che ogni suo elemento f si scriva $f = ut^r$ con u invertibile, t un generatore del massimale, $r \in \mathbb{N}$ (che si chiama la valutazione di f, e non dipende dal generatore t scelto).

(2) La molteplicità del punto P per la curva $\mathscr{C}$ si legge come dimensione su K di opportuni spazi vettoriali che dipendono solo dall'anello locale: $m_P(\mathscr{C}) = \dim_K\big(\mathscr{M}_P(\mathscr{C})^n/\mathscr{M}_P(\mathscr{C})^{n+1}\big)$ per ogni $n \gg 0$.

(3) La molteplicità di intersezione di due curve $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ in un punto P si legge come la dimensione di uno spazio vettoriale che ha a che fare con gli anelli locali: $m_P(\mathscr{C},\mathscr{D}) = \dim_K\big(\mathscr{O}_P(\mathbb{A}^2)/(F,G)\big)$ se F, G sono le equazioni delle due curve. In realtà non abbiamo detto cosa sia $\mathscr{O}_P(\mathbb{A}^2)$ (l'anello locale del punto nel piano), ma il lettore può immaginarlo... Risulta che $\mathscr{O}_P(\mathbb{A}^2)/(F,G)$ è isomorfo sia a $\mathscr{O}_P(\mathscr{C})/(G)$, sia a $\mathscr{O}_P(\mathscr{D})/(F)$, o più simmetricamente a $\mathscr{O}_P(\mathscr{C}) \otimes_{\mathscr{O}_P(\mathbb{A}^2)} \mathscr{O}_P(\mathscr{D})$. Si può vedere il libro di Fulton, dove la molteplicità di intersezione è presentata come funzione che soddisfa una assiomatica non difficile.

1.7.4. La collezione di tutti gli anelli locali permette di caratterizzare completamente la curva (per esempio determina sia l'anello delle coordinate che il corpo delle funzioni razionali). Possiamo illustrare questo principio con due esempi:

(1) se $\mathscr{C}$ è liscia (non ha punti singolari), allora vi è una corrispondenza biunivoca tra i punti di $\mathscr{C}$ e gli anelli di valutazione discreta di $K(\mathscr{C})$ contenenti $K[\mathscr{C}]$.

(2) in generale vi è una corrispondenza biunivoca tra i punti di $\mathscr{C}$ e gli anelli locali di $K(\mathscr{C})$ contenenti $K[\mathscr{C}]$, e una corrispondenza biunivoca tra i posti di $\mathscr{C}$ e gli anelli di valutazione discreta di $K(\mathscr{C})$ contenenti $K[\mathscr{C}]$.

1.7.5. La relazione tra le "nozioni locali" nel senso degli anelli locali qui introdotte e quelle introdotte nel capitolo precedente (che potremmo chiamare "nozioni formali", visto l'uso intensivo delle serie formali) è dato dal fatto che i completamenti adici (rispetto all'ideale massimale) degli anelli locali danno luogo ad "anelli (di serie) formali", e i quozienti di questi che danno invarianti geometrici, tipo quelli visti sopra, sono tra loro isomorfi...

1.7.6. Non useremo gli anelli locali nel resto del capitolo, e quindi era inutile sia scrivere che leggere questo numero (e spiega anche l'eccessiva sintesi dell'esposizione), ma la nozione di anello locale è diventata strategica nella geometria algebrica moderna, e si voleva evidenziarne la genesi: il lettore interessato può cominciare consultando il libro di Fulton.

2. Divisori sulle curve.

2.1. DIVISORI. Introduciamo ora il concetto fondamentale che permetterà uno studio accurato sia delle funzioni razionali sulle curve, sia delle curve stesse, fino ad iniziare la classificazione birazionale. L'apparenza astratta e un po' banale della definizione non deve trarre in inganno: si tratta di uno strumento estremamente potente e che nasconde tutta la geometria birazionale delle curve. Lo esprimeremo in termini di posti affinché sia valido per tutte le curve algebriche; per le curve lisce si potrebbero usare i punti. *D'ora in poi le curve saranno sempre da intendersi proiettive.*