posti (ogni punto è centro di un unico posto lineare).

1.6.7. Proiezioni e proiezioni tra curve. Ricordiamo che, date due sottovarietà lineari complementari $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ (significa che hanno intersezione vuota e la congiungente è tutto lo spazio) di $\mathbb{P}^n(K)$, la proiezione π su $\mathbb{M}$ di direzione $\mathbb{L}$ è l'applicazione proiettiva di $\mathbb{P}^n(K) \smallsetminus \mathbb{L}$ su $\mathbb{M}$ (suriettiva) che manda ogni punto P in $(P \vee \mathbb{L}) \wedge \mathbb{M}$. Talvolta si considera anche l'applicazione che manda P in $(P \vee \mathbb{L})$, evitando la scelta dello schermo di proiezione $\mathbb{M}$; in tal caso abbiamo che π è applicazione proiettiva di $\mathbb{P}^n(K) \smallsetminus \mathbb{L}$ verso la stella di $\mathbb{L}$ (sottospazi di $\mathbb{P}^n(K)$ di dimensione $\dim \mathbb{L} + 1$ e contenenti $\mathbb{L}$).

Ora, se $\mathscr{C}$ è una curva algebrica in $\mathbb{P}^n(K)$, la sua immagine tramite π o è banale, oppure è una curva algebrica in $\mathbb{M}$. Più precisamente: se $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{L}$ allora $\pi(\mathscr{C}) = \varnothing$, se $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{L} \vee M$ per qualche $M \in \mathbb{M}$ allora $\pi(\mathscr{C}) = \{M\}$, altrimenti $\pi(\mathscr{C})$ è una curva algebrica in $\mathbb{M}$. Infatti i primi due casi sono chiari per definizione di proiezione; per il terzo caso basta osservare che scegliendo opportunamente le coordinate nello spazio proiettivo, si vede subito che l'ideale I' che definisce $\pi(\mathscr{C})$ è semplicemente l'intersezione dell'ideale I che definisce $\mathscr{C}$ con l'anello delle coordinate di $\mathbb{M}$. Quindi abbiamo una mappa $K[\mathbb{M}]/I' \longrightarrow K[\mathbb{A}^n(K)]/I$, che è il morfismo di K-algebre $K(\mathscr{C}') \to K(\mathscr{C})$ corrispondente a $\pi : \mathscr{C} \to \pi(\mathscr{C})$.

I punti della curva proiettata $\pi(\mathscr{C})$ sono dati da:

(1) proiezioni su $\mathbb{M}$ di punti di $\mathscr{C}$ non appartenenti ad $\mathbb{L}$;

(2) intersezioni $\mathbb{M} \cap T$ dove $T = \mathbb{L} \vee t_{\mathfrak{P}}^{(k)}$ con $\mathfrak{P}$ posto di $\mathscr{C}$ di centro in $\mathbb{L}$, e $t_{\mathfrak{P}}^{(k)}$ tale che T abbia dimensione $n - \dim \mathbb{M}$.

In particolare, se proiettiamo da un punto ad un iperpiano, i punti della curva proiettata sono le proiezioni dei punti della curva data e le intersezioni con l'iperpiano delle rette tangenti alla curva data per il centro di proiezione.

1.6.8. Grado della curva proiettata. Il grado della curva proiettata è minore o uguale a quello della curva data. Precisamente, se $\mathfrak{P}$ è posto di $\mathscr{C}$, $\pi(\mathfrak{P})$ il posto immagine in $\pi(\mathscr{C})$, essendo $\mathfrak{P}(\pi(T)) = \mathfrak{Q}(T^\nu)$, e $\mathbb{L} \cdot \mathscr{C}$ è divisore di $\mathscr{C}$ di grado b, allora risulta

$$\deg \pi(\mathscr{C}) = \frac{\deg \mathscr{C} - b}{\nu} .$$

Inoltre, se gli iperpiani contenenti $\mathbb{L}$ tagliano su $\mathscr{C}$ un sistema lineare S di grado d, e i punti base di tale sistema formano un divisore B di grado b, allora il sistema lineare dei divisori iperpiani di $\pi(\mathscr{C})$ è formato dalle proiezioni del sistema residuo $S - B$, di grado $\frac{d-b}{\nu}$.

In particolare, π è birazionale da $\mathscr{C}$ a $\pi(\mathscr{C})$ se e solo se $\nu = 1$.

In particolare, $\deg \mathscr{C} = \deg \pi(\mathscr{C})$ se e solo se $\mathscr{C}$ non interseca il centro di proiezione ($b = 0$) e la trasformazione tra le curve è birazionale ($\nu = 1$).

1.6.9. Problema. Studiare le caratteristiche (singolarità, molteplicità, classi) dei posti proiettati. Per esempio: se $\mathfrak{P}$ è posto semplice di $\mathscr{C}$, allora

(1) $\pi(\mathfrak{P})$ è posto semplice di $\pi(\mathscr{C})$ se e solo se $\pi(t_{\mathfrak{P}})$ è una retta, cioè la tangente di $\mathfrak{P}$ non è contenuta in $\mathbb{L} \vee \mathfrak{P}(0)$;

(2) $\pi(\mathfrak{P})$ è posto multiplo di $\pi(\mathscr{C})$ se e solo se $\pi(t_{\mathfrak{P}}) = \pi(\mathfrak{P}(0))$, cioè la tangente di $\mathfrak{P}$ è contenuta in $\mathbb{L} \vee \mathfrak{P}(0)$; in tal caso la retta tangente a $\pi(\mathfrak{P})$ è data da $\pi(\mathbb{L} \vee t_{\mathfrak{P}}^{(i)})$ dove i è il minimo indice per cui tale proiezione è una retta; molteplicità di $\pi(\mathfrak{P})$?

(3) supponiamo $\mathfrak{P}$ semplice e di classe 1; $\pi(\mathfrak{P})$ è posto di flesso se e solo se il suo piano osculatore è contenuto in $\mathbb{L} \vee t_{\mathfrak{P}}$; molteplicità del flesso?

1.6.10. *Ogni curva algebrica è birazionalmente equivalente ad una curva piana, anche ordinaria, ma non necessariamente liscia.* Questo risultato è chiaro per un argomento elementare già visto sui corpi di funzioni razionali (ed eventualmente trasformazioni quadratiche), ma ora possiamo anche provarlo tramite una costruzione geometrica di proiezione della curva algebrica data su un piano.

Ogni curva algebrica è birazionalmente equivalente ad una curva algebrica liscia in uno spazio proiettivo di dimensione 3. Questo non è evidente, e verrà visto come conseguenza del teorema di Riemann-Roch. Quello che possiamo provare ora è: *ogni curva algebrica liscia in $\mathbb{P}^n(K)$ può essere proiettata in una curva algebrica liscia in qualche spazio proiettivo $\mathbb{P}^m(K)$ con $m \geqslant 3$.*

1.7. Punti e anelli locali. Data una curva affine $\mathscr{C}$ e un suo punto P, diciamo che un elemento $f \in K(\mathscr{C})$ è definito in P se si può scrivere $f = a/b$ con a, b polinomi e $b(P) \neq 0$. Il