curve piane. L'idea fondamentale è che una curva algebrica piana è definita (a meno di equivalenza birazionale) dal proprio corpo delle funzioni razionali, che a sua volta è una qualsiasi estensione algebrica finita di un corpo di trascendenza 1 su K. Questo si ottiene con una equazione algebrica, se vi sono 2 variabili come nel piano; ma in generale?

Definiamo curva algebrica $\mathscr{C}$ in $\mathbb{P}^n(K)$ l'insieme dei punti di $\mathbb{P}^n(K)$, o indifferentemente l'insieme dei posti di $\mathbb{P}^n(K)$, che sono annullati da tutti i polinomi di un ideale I di $K[T_1,\dots,T_n]$ (oppure di un ideale omogeneo J di $K[X_0,\dots,X_n]_{\rm h}$) tale che (l'anello quoziente $K[\underline{T}]/I$ sia integro e) il corpo dei quozienti di $K[\underline{T}]/I$ sia estensione algebrica finita di un corpo di trascendenza 1 su K, che indicheremo con $K(\mathscr{C})$. Si noti che $\mathfrak{P}$ è un posto di $\mathscr{C}$ se e solo se mandando X_i in $\mathfrak{P}_i(X)$ otteniamo un isomorfismo $K(\mathscr{C})\cong K(\mathfrak{P}(T))$.

1.6.2. Grado. È facile definire l'intersezione di una curva algebrica con un iperpiano, associando ad ogni posto della curva una molteplicità di intersezione con l'iperpiano (l'ordine di zero nella sostituzione del posto nell'equazione dell'iperpiano).

Si può definire il grado della curva come la somma delle molteplicità di intersezione con un qualsiasi iperpiano che non la contenga, ovvero il numero di punti di intersezione con un generico iperpiano che non la contenga.

Si osservi che: *se una curva algebrica irriducibile in $\mathbb{P}^n$ ha grado r, allora il più piccolo sottospazio proiettivo che la contiene ha dimensione al più r. Quindi, curve irriducibili non contenute in sottospazi propri hanno gradi non inferiori ad n.*

1.6.3. Intersezioni con ipersuperficie: si definisce attribuendo ad ogni posto della curva la molteplicità che si ottiene dall'ordine di sostituzione del posto nell'equazione dell'ipersuperficie. *Teorema di Bézout: se la curva ha grado d, interseca ogni superficie di grado d' in dd' posti se contati con la loro molteplicità di intersezione.*

1.6.4. Spazi osculatori a posti e curve. Dato un posto $\mathfrak{P}$ di $\mathbb{P}^n(K)$ di centro $P_0=\mathfrak{P}(0)$ e parametrizzazione $\mathfrak{P}(T)=\sum_{i\geqslant 0}P_iT^i$, consideriamo gli iperpiani della stella di P_0: sia $\pi\in P_0^*$.

(0) Naturalmente, per ogni $\pi\in P_0^*$ abbiamo ${\rm ord}_{\mathfrak{P}}\pi>0$ (tutti annullano il centro di $\mathfrak{P}$), e definiamo la molteplicità, o ordine, di $\mathfrak{P}$ come il minimo di tali ordini; si indica con $m_{\mathfrak{P}}=\min_{\pi\in P_0^*}{\rm ord}_{\mathfrak{P}}\pi$, e si tratta del minimo intero m tale che $P_m\notin\langle P_0\rangle$.

(1) Consideriamo ora gli iperpiani $\pi\in P_0^*$ tali che ${\rm ord}_{\mathfrak{P}}\pi>m_{\mathfrak{P}}$, e definiamo $m_{\mathfrak{P}}^{(1)}=\min_{{\rm ord}_{\mathfrak{P}}>m_{\mathfrak{P}}}{\rm ord}_{\mathfrak{P}}\pi$: si tratta del minimo intero m_1 tale che $P_{m_1}\notin\langle P_0,P_m\rangle$; definiamo anche la (prima) classe di $\mathfrak{P}$ come la differenza $c_{\mathfrak{P}}=m_{\mathfrak{P}}^{(1)}-m_{\mathfrak{P}}$. Gli iperpiani che soddisfano alla condizione considerata sono quelli di $P_0^\perp\cap P_m^\perp$ (in $\mathbb{P}^n(K)^*$), e dunque danno luogo ad una retta $t_{\mathfrak{P}}$ di $\mathbb{P}^n(K)$ che si dice la retta tangente nel posto $\mathfrak{P}$: è la retta $P_0\vee P_m$.

(2) Consideriamo ora gli iperpiani $\pi\in P_0^*$ tali che ${\rm ord}_{\mathfrak{P}}\pi>m_{\mathfrak{P}}^{(1)}$, e definiamo $m_{\mathfrak{P}}^{(2)}=\min_{{\rm ord}_{\mathfrak{P}}>m_{\mathfrak{P}}^{(1)}}{\rm ord}_{\mathfrak{P}}\pi$: si tratta del minimo intero m_2 tale che $P_{m_2}\notin\langle P_0,P_m,P_{m_1}\rangle$; definiamo anche la seconda classe di $\mathfrak{P}$ come la differenza $c_{\mathfrak{P}}^{(2)}=m_{\mathfrak{P}}^{(2)}-m_{\mathfrak{P}}^{(1)}$. Gli iperpiani che soddisfano alla condizione considerata sono quelli di $P_0^\perp\cap P_m^\perp\cap P_{m_1}^\perp$ (in $\mathbb{P}^n(K)^*$), e dunque danno luogo ad un piano $t_{\mathfrak{P}}^{(2)}$ di $\mathbb{P}^n(K)$ che si dice il piano osculatore nel posto $\mathfrak{P}$: è $P_0\vee P_m\vee P_{m_1}$.

(s) Continuando in questo modo, per ogni s ($1\leqslant s<n$) possiamo definire il sottospazio s-dimensionale $t_{\mathfrak{P}}^{(s)}$ di $\mathbb{P}^n(K)$ osculatore al posto $\mathfrak{P}$, la molteplicità s-esima $m_{\mathfrak{P}}^{(s)}$ del posto, e la classe s-esima $c_{\mathfrak{P}}^{(s)}=m_{\mathfrak{P}}^{(s)}-m_{\mathfrak{P}}^{(s-1)}$.

Abbiamo quindi una inclusione di sottospazi osculatori di $\mathfrak{P}$ $P_0\subseteq t_{\mathfrak{P}}\subseteq t_{\mathfrak{P}}^{(2)}\subseteq\cdots\subseteq t_{\mathfrak{P}}^{(n-1)}$ tale che la molteplicità di intersezione di $\mathfrak{P}$ con un iperpiano π è data da $m_{\mathfrak{P}}^{(s)}$ se e solo se $\pi\supseteq t_{\mathfrak{P}}^{(s)}$ e $\pi\not\supseteq t_{\mathfrak{P}}^{(s+1)}$.

Naturalmente, se $\mathfrak{P}$ è posto di un sottospazio lineare, la gerarchia degli spazi osculatori si ferma a quella dimensione...

1.6.5. Si dicono tangenti di una curva in un punto le tangenti dei posti della curva di centro quel punto. In generale si parla di varietà lineari osculatrici a un punto di una curva, intendendo i sottospazi osculatori dei posti della curva di centro quel punto.

1.6.6. Singolarità. Un punto di una curva algebrica si dice singolare se esso è centro di più posti della curva, o se è centro di almeno un posto non lineare. La molteplicità del punto per la curva è la somma delle molteplicità dei posti della curva di centro in quel punto. Una curva algebrica si dice non singolare, o liscia, se non ha punti singolari; in tal caso vi è corrispondenza biunivoca tra punti e