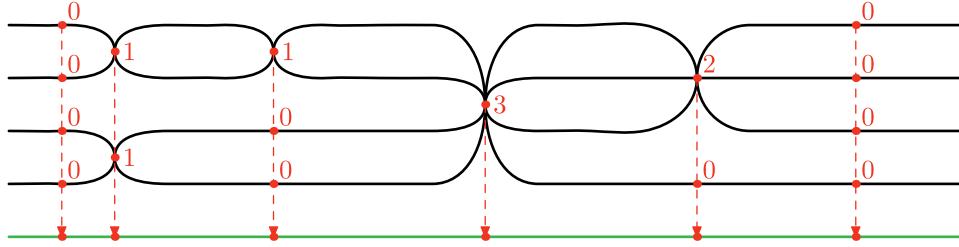


della topologia delle Superficie di Riemann.



Per verificare l'enunciato, consideriamo la mappa razionale $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e l'inclusione di corpi $K(\mathcal{D}) \rightarrow K(\mathcal{C})$ indotta, che rende $K(\mathcal{C})$ una estensione finita di $K(\mathcal{D})$. In particolare $K(\mathcal{C}) = K(\mathcal{D})(\eta)$ per qualche η algebrico su $K(\mathcal{D})$, cioè che annulla un polinomio $q(\underline{T}, Z) \in K[\underline{T}, Z]$. Sia allora \mathfrak{Q} un posto di \mathcal{D} ; per trovare i posti di \mathcal{C} aventi come immagine \mathfrak{Q} bisogna estendere $\mathfrak{Q} : K[\mathcal{D}] \rightarrow K[T]$ a un morfismo $\mathfrak{Q} : K[\mathcal{C}] \rightarrow K[S]$ che sia compatibile con l'inclusione dei corpi di funzioni razionali. Quindi si tratta di determinare η soluzione di $q(\mathfrak{Q}(T), \eta) = 0$, cosa che sappiamo fare in $K[T]$; vi è dunque almeno un posto di \mathcal{C} con immagine \mathfrak{Q} , e al più in numero pari al grado di q in Z , quindi al grado $e = \deg F$ della estensione $K(\mathcal{C})$ su $K(\mathcal{D})$. Si noti che, se $\eta(T) \in K[T^{1/s}]$ possiamo usare $S = T^{1/s}$ e allora $\eta(S)$ definisce un posto $\mathfrak{P}(S)$ di \mathcal{C} tale che $F(\mathfrak{P}(S)) = \mathfrak{Q}(S^s)$, forma non primitiva di $\mathfrak{Q}(T)$: se $s > 1$ vi sono allora più η che danno il posto \mathfrak{P} ...

A parte per un numero finito di posti, il poligono di Newton di $q(\mathfrak{Q}(T), Z)$ (rispetto a Z) sarà piatto, e avrà e zeri non ramificati se $q(\mathfrak{Q}(0), Z)$ avrà zeri distinti. Le soluzioni possono quindi essere in numero minore di e solo per i posti \mathfrak{Q} che annullano il discriminante $D_Z(q(\underline{T}, Z))$, quindi per un numero finito di posti. In questi casi, basta attribuire ad ogni posto dell'antimmagine una molteplicità pari all'esponente s prima descritto per ottenere la descrizione voluta.

1.5.2. CASO DI PROIEZIONE SU UN ASSE. Un caso particolarmente importante e semplice del risultato precedente si ottiene quando consideriamo la proiezione π sull'asse delle ascisse di una curva \mathcal{C} in un riferimento del piano scelto con le usuali proprietà: il punto improprio delle ordinate non appartenga alla curva, la retta impropria non sia tangente alla curva, e nessuna tangente in punti singolari sia verticale (cioè del fascio per il punto improprio delle ordinate). In tal caso la proiezione $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{A}^1(K) = V(Y)$ dà luogo alla estensione di corpi $K(\mathbb{A}^1(K)) = K(X) \rightarrow K(\mathcal{C})$ (di dimensione pari al grado della curva) generata da Y . Quindi possiamo usare l'equazione della curva per descrivere l'estensione, e la ramificazione è descritta esattamente dalla condizione $D_Y(f) = 0$, cioè dal risultante tra l'equazione della curva e la polare rispetto al punto improprio delle ordinate. Quindi il luogo di ramificazione è contenuto nella intersezione tra le due curve dette (la curva con la propria polare), tenendo conto che i posti lineari sui punti singolari hanno ramificazione nulla. Per i posti \mathfrak{P} su punti $P \in \mathcal{C}$ non singolari avremo $\text{ram}_{\mathfrak{P}} F = m_P(\mathcal{C}, \mathcal{C}') - 1 = m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{C}') - 1$, mentre per i posti sui punti singolari risulta $\text{ram}_{\mathfrak{P}} F = m_{\mathfrak{P}} - 1$.

In particolare possiamo dare una formula generale per la ramificazione totale:

$$\text{ram}(\pi) = \sum_{\mathfrak{P} \in \mathcal{C}} \text{ram}_{\mathfrak{P}} \pi = \deg \mathcal{C} (\deg \mathcal{C} - 1) - \sum_{\mathfrak{P}} (m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{C}') - m_{\mathfrak{P}} + 1)$$

(dovrebbe essere chiaro da quanto detto).

In particolare, per curve ordinarie (solo singolarità ordinarie) in un riferimento generico, nessun posto di centro singolare risulta di ramificazione.

1.5.3. Che cosa cambia se il punto di proiezione (il punto improprio delle ordinate) appartiene alla curva (eventualmente singolare)? Fare attenzione: cambia anche il grado della mappa...

1.6. MAPPE BIRAZIONALI (E CURVE IN GENERALE). Dal risultato di struttura delle mappe razionali segue quindi che una mappa razionale è birazionale se e solo se è un rivestimento con un solo foglio, ovvero se e solo se induce una biiezione tra i posti delle due curve, o anche se e solo se induce una biiezione con un numero finito di eccezioni tra i punti delle due curve. Infatti tutte queste condizioni sono equivalenti al fatto che $[K(\mathcal{C}) : K(\mathcal{D})] = 1$, e cioè che l'estensione dei due corpi di funzioni razionali sia banale.

1.6.1. CURVE IN $\mathbb{P}^n(K)$. La nozione di mappa birazionale permette di dare una definizione facile ed utile di curve non necessariamente piane, e di estendere a queste alcune nozioni e proprietà delle