ascisse nel riferimento scelto, mentre x indicherà la classe di X nell'anello $K[\mathscr{C}] = K[X,Y]/(f)$, o in $K(\mathscr{C})$.

1.4. Struttura dei corpi di funzioni razionali su curve. Cerchiamo una caratterizzazione dei corpi (estensioni di K) che possono essere corpi di funzioni razionali per qualche curva (piana) definita su K.

1.4.1. Osserviamo prima di tutto che ogni corpo del tipo $K(\mathscr{C})$ è sempre estensione algebrica di un corpo di trascendenza 1 su K. Infatti abbiamo $K(\mathscr{C}) = \mathscr{Q}(K[X,Y]/f(X,Y))$, e quindi è estensione algebrica di $K(X)$, poiché l'equazione della curva rende Y algebrico su $K(X)$ (che grado ha l'estensione $K(\mathscr{C})$ su $K(X)$? Dipende dalle coordinate scelte?).

1.4.2. Osserviamo inoltre che ogni coppia di elementi φ e ψ di $K(\mathscr{C})$ sono algebricamente dipendenti, nel senso che esiste un polinomio $P(U,V) \in K[U,V]$ tale che $P(\varphi,\psi) = 0$. Infatti sia φ che ψ sono algebrici su $K(X)$, e quindi esistono polinomi $a(X,U) = \sum_i a_i(X)U^i$ e $b(X,V) = \sum_i b_i(X)V^i$ tali che $a_i(X), b_i(X) \in K[X]$, gli $a_i(X)$ non hanno fattori comuni, e lo stesso vale per i $b_i(X)$, tali che $a(x,\varphi) = 0 = b(x,\psi)$ in $K(\mathscr{C})$ (per ottenere questo, basta prendere relazioni di dipendenza su $K(X)$, e poi eliminare il denominatore comune e gli eventuali fattori comuni dei coefficienti). Di conseguenza abbiamo che il risultante $R_X(a,b) = p(U,V) \in K[U,V]$ è polinomio non nullo, mentre $p(\varphi,\psi) = 0$, poiché i polinomi in X dati da $a(X,\varphi)$ e $b(X,\psi)$ hanno il fattore comune $X - x$ (valutati in $X = x$ si annullano entrambi).

1.4.3. Di conseguenza abbiamo la seguente caratterizzazione: *un corpo F estensione di K, di caratteristica nulla, è corpo delle funzioni razionali di una curva se e solo se è estensione algebrica finita di un corpo di trascendenza 1 su K.* Un lato dell'implicazione è chiaro da quanto abbiamo detto, mentre l'altro discende dal fatto che le estensioni algebriche finite di corpi di caratteristica nulla sono monogene, cioè generate da un elemento. ???

1.5. Struttura di mappe razionali. Data una mappa razionale non costante F da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$, vogliamo descriverne la struttura geometrica sfruttando il fatto che essa corrisponde ad una applicazione di K-algebre $K(\mathscr{D}) \longrightarrow K(\mathscr{C})$ (necessariamente iniettiva, essendo non nulla, e il nucleo un ideale). Trattandosi di una estensione di corpi, indichiamo con $\deg(F) = [K(\mathscr{C}) : K(\mathscr{D})]$ il grado della estensione, cioè la dimensione $\dim_{K(\mathscr{D})} K(\mathscr{C})$ di $K(\mathscr{C})$ in quanto $K(\mathscr{D})$-spazio vettoriale (finitamente generato). Per avere una buona descrizione geometrica, comunque, è facile capire che ragionare in termini di punti delle curve è poco utile (si consideri ad esempio la mappa birazionale che parametrizza una cubica nodale). Parleremo quindi in termini di posti sulle curve: se $\mathfrak{P}(T)$ è un posto di $\mathscr{C}$, la sua immagine tramite F è il posto di $\mathscr{D}$ definito dalla parametrizzazione $F(\mathfrak{P}(T))$.

Nota: come pensare i posti di una curva nel contesto dei corpi di funzioni razionali? Dare un posto $\mathfrak{P}$ di $\mathscr{C}$ corrisponde a dare una applicazione iniettiva di K-algebre da $K[\mathscr{C}]$ a $K[\![T]\!]$ (che si estende ad un isomorfismo di $K(\mathscr{C})$ con $K(\mathfrak{P})$), ed essenzialmente è come dare una mappa razionale da una "retta affine formale" in $\mathscr{C}$, da pensare come una specie di "calcolo locale algebrico".

1.5.1. Il risultato principale è allora il seguente: *La mappa razionale non costante F da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ induce una funzione suriettiva dai posti di $\mathscr{C}$ ai posti di $\mathscr{D}$ tale che, al di fuori di un numero finito di eccezioni, l'antimmagine tramite F di ogni posto di $\mathscr{D}$ è costituita da esattamente* $\deg(F)$ *posti distinti di $\mathscr{C}$. Per i posti $\mathfrak{Q}$ di $\mathscr{D}$ che fanno eccezione (detti "valori di ramificazione per F") è possibile attribuire ad ogni posto $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ dell'antimmagine una molteplicità $m_i = m_{\mathfrak{P}_i}F$ (intero positivo) tale che $F(\mathfrak{P}_i(T)) = \mathfrak{Q}(T^{m_i})$ e la somma di tali molteplicità è esattamente* $\deg(F)$. *I posti con molteplicità maggiore di* 1 *si dicono di ramificazione per F, e si definisce anche la ramificazione di F in $\mathfrak{P}$ come* $\mathrm{ram}_{\mathfrak{P}}F = m_{\mathfrak{P}}F - 1$. *Infine la somma su tutti i posti di $\mathscr{C}$ della ramificazione (somma finita) si dice la ramificazione (totale) di F e si indica con* $\mathrm{ram}(F)$: *questo numero avrà una certa importanza in futuro.* Di solito si riassume la descrizione precedente dicendo che una mappa razionale tra curve è un rivestimento ramificato con $\deg(F)$ fogli, se $\deg(F)$ è il grado della estensione corrispondente di corpi. Nel caso di curve sul corpo complesso, si tratta in effetti di rivestimenti ramificati nel senso