1.3.2. Date due curve affini $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$, *una mappa razionale di $\mathscr{C}$ in $\mathscr{D}$ è una funzione definita su quasi-tutta $\mathscr{C}$ (significa: tranne che per un numero finito di punti) a valori in $\mathscr{D}$ e tale che esistono funzioni razionali $\varphi_1(X,Y), \varphi_2(X,Y) \in K(X,Y)$ tali che $F = \binom{\varphi_1}{\varphi_2}$*, cioè per quasi ogni punto $P = \binom{x}{y} \in \mathscr{C}$ si ha $F(P) = \binom{\varphi_1(x,y)}{\varphi_2(x,y)}$. È chiaro che ogni mappa polinomiale è razionale, che l'identità di ogni curva è mappa razionale, e anche che la composizione di mappe razionali è una mappa razionale.

Dovrebbe essere chiaro che una mappa razionale tra curve è una mappa polinomiale omogenea (cioè definita da tre polinomi omogenei dello stesso grado) tra le curve proiettive corrispondenti.

Una mappa razionale si dirà un isomorfismo razionale, o mappa birazionale se esiste una mappa razionale in direzione opposta tale che le composizioni siano le funzioni identiche (di $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$) ovunque siano definite. *Due curve si diranno birazionalmente equivalenti se tra di loro esistono mappe birazionali. Proprietà stabili per mappe birazionali si diranno proprietà birazionali delle curve: lo studio delle proprietà birazionali è lo scopo di questo capitolo.*

1.3.3. Trasformazioni quadratiche. Ad esempio, le trasformazioni quadratiche del piano sono chiaramente mappe birazionali tra curve non eccezionali e le loro immagini strette. In particolare possiamo quindi dire che ogni curva piana è birazionalmente equivalente ad una curva piana ordinaria, cioè avente solo singolarità ordinarie. D'altra parte possiamo anche subito concludere che invarianti proiettivi del tipo "grado della curva", "deficienza della curva", "numero e molteplicità dei punti singolari" non sono invarianti birazionali, quindi non sono proprietà birazionali delle curve...

1.3.4. Analogamente a quanto visto per le mappe polinomiali, il risultato più importante riguardo alle mappe razionali è il seguente: *l'applicazione naturale di composizione (o sostituzione)*

$$\mathrm{Raz}_K(\mathscr{C},\mathscr{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K\mathrm{alg}}(K(\mathscr{D}), K(\mathscr{C}))$$

associa ad ogni mappa razionale F tra curve il morfismo F^* di K-algebre, in direzione inversa..., mandando $\varphi \in K(\mathscr{D})$ in $\varphi \circ F \in K(\mathscr{C})$. Tale applicazione è una corrispondenza biunivoca tra mappe razionali tra curve e applicazioni di K-algebre (in direzione inversa) tra i corrispondenti corpi di funzioni razionali; corrispondenza che rispetta inoltre l'identità e le composizioni quando siano definite ($\mathrm{id}_{\mathscr{C}}^* = \mathrm{id}_{K(\mathscr{C})}$ e $(F\circ G)^* = G^* \circ F^*$).

1.3.5. Le mappe birazionali di curve corrispondono quindi (biiettivamente) agli isomorfismi di K-algebre dei corrispondenti corpi di funzioni razionali. Quindi *due curve sono birazionalmente equivalenti se e solo se i corrispondenti corpi di funzioni sono isomorfi (come K-algebre).*

Ovviamente, ogni isomorfismo polinomiale è una mappa birazionale, mentre in generale il viceversa è falso, come si può osservare sull'esempio prima dato della cubica cuspoidale: la funzione evidenziata è una mappa birazionale, ma non un isomorfismo polinomiale.

1.3.6. Osserviamo ancora che una mappa birazionale non induce necessariamente una biiezione (come mappa insiemistica tra i punti delle curve), sia perché potrebbe non essere ovunque definita, sia perché potrebbe non essere né iniettiva né suriettiva. Tuttavia non è difficile vedere che induce una biiezione tra i punti delle due curve al di fuori di insiemi finiti in ciascuna delle due.

È più interessante invece osservare che una mappa birazionale induce una corrispondenza biunivoca tra i posti delle due curve (senza alcuna eccezione), nel modo ovvio: se la mappa F è espressa in termini polinomiali proiettivi, e $\mathfrak{P}(T)$ definisce un posto di $\mathscr{C}$, allora $F(\mathfrak{P}(T))$ è un posto di $\mathscr{D}$ (nel senso che ne è una parametrizzazione, anche se non necessariamente primitiva), e questa mappa dà una corrispondenza biunivoca.

Dopo aver studiato la struttura delle mappe razionali in generale, potremo vedere che queste due proprietà caratterizzano le mappe birazionali: *una mappa razionale è birazionale se e solo se induce una biiezione tra i posti delle due curve, oppure se e solo se induce una biiezione, tranne che per un numero finito di eccezioni, tra i punti delle curve.*

1.3.7. Curve Duali. Osserviamo subito questo corollario: *ogni curva (non contenente rette) è birazionale alla propria duale.*

1.3.8. Sempre per curiosità, si verifichi che $K(\mathscr{C})$ si identifica con $\mathrm{Raz}_K(\mathscr{C}, \mathbb{A}^1(K))$, che identifica coerentemente gli elementi del corpo delle funzioni razionali sulla curva con funzioni razionali dalla curva nella retta affine...

1.3.9. Notazione generale. Finora abbiamo sempre usato le maiuscole per indicare le coordinate negli spazi affini e proiettivi; useremo la corrispondente lettera minuscola per intendere la classe di quell'elemento nel corpo delle funzioni di una curva. Per esempio, X è la coordinata delle