1.2.2. Data una seconda curva affine $\mathscr{D}$, *una funzione insiemistica* $F:\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{D}$ *si dice una mappa polinomiale tra le due curve se esistono polinomi* $f_1(X,Y), f_2(X,Y)\in K[X,Y]$ *tali che* $F=\binom{f_1}{f_2}$, cioè per ogni punto $P=\binom{x}{y}\in\mathscr{C}$ si ha $F(P)=\binom{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$. È chiaro che l'identità di ogni curva è mappa polinomiale, e anche che la composizione di mappe polinomiali è una mappa polinomiale.

Una mappa polinomiale si dirà un isomorfismo polinomiale se ammette una inversa (insiemistica) che sia una mappa polinomiale.

1.2.3. Il risultato più importante riguardo alle mappe polinomiali è il seguente, che comincia ad estendere il dizionario geometria-algebra alle funzioni tra gli oggetti in questione (curve da una lato, K-algebre dall'altro): *l'applicazione naturale di composizione (o sostituzione)*

$$\mathrm{Polin}_K(\mathscr{C},\mathscr{D})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{K\mathrm{alg}}(K[\mathscr{D}],K[\mathscr{C}])$$

associa ad ogni mappa polinomiale F tra curve il morfismo F^* di K-algebre, in direzione inversa..., mandando $\varphi\in K[\mathscr{D}]$ in $\varphi\circ F\in K[\mathscr{C}]$. Tale applicazione è una corrispondenza biunivoca tra mappe polinomiali tra curve e applicazioni di K-algebre (in direzione inversa) tra i corrispondenti anelli di coordinate; corrispondenza che rispetta inoltre l'identità e le composizioni quando siano definite ($\mathrm{id}_{\mathscr{C}}^*=\mathrm{id}_{K[\mathscr{C}]}$ e $(F\circ G)^*=G^*\circ F^*$).

È facile vedere che l'applicazione F^* è ben definita (viene da un endomorfismo di $K[X,Y]$ che rispetta i quozienti). Inoltre ogni applicazione di K-algebre di $K[\mathscr{D}]$ in $K[\mathscr{C}]$ si rialza ad una applicazione di $K[X,Y]$ in sè, e induce una mappa polinomiale di $\mathbb{A}^2(K)$ in sè che si restringe ad una mappa polinomiale di $\mathscr{C}$ in $\mathscr{D}$. È noioso ma facile vedere che le due costruzioni sono una l'inversa dell'altra, mostrando quindi il risultato enunciato.

1.2.4. Gli isomorfismi polinomiali di curve corrispondono quindi (biiettivamente) agli isomorfismi di K-algebre dei corrispondenti anelli di coordinate. Quindi *due curve sono polinomialmente isomorfe se e solo se i corrispondenti anelli di coordinate sono isomorfi (come K-algebre).*

1.2.5. Si osservi inoltre che un isomorfismo polinomiale è una biiezione insiemistica tra i punti delle due curve, mentre non è vero che una mappa polinomiale che sia una biiezione insiemistica tra i punti sia necessariamente un isomorfismo polinomiale. Per esempio la mappa $F:\mathbb{A}^1(K)\longrightarrow\mathscr{C}$, ove $\mathscr{C}$ è la cubica cuspoidale di equazione $Y^2=X^3$, data da $F(t)=\binom{t^2}{t^3}$ è mappa polinomiale, biiettiva, ma l'applicazione associata di K-algebre $F:K[X,Y]/(Y^2-X^3)\longrightarrow K[T]$ che manda X in T^3 e Y in T^2 non è un isomorfismo (iniettiva, ma non suriettiva).

1.2.6. Si osservi infine che se una proiettività del piano manda una curva in un'altra, allora induce tra queste un isomorfismo polinomiale, mentre non è vero in generale che gli isomorfismi polinomiali siano indotti da proiettività del piano (cioè da mappe polinomiali di primo grado). Per esempio basta considerare due parabole generalizzate.

1.2.7. Per curiosità, si verifichi che $K[\mathscr{C}]$ si identifica con $\mathrm{Polin}_K(\mathscr{C},\mathbb{A}^1(K))$, che permette di identificare gli elementi dell'anello delle coordinate come particolari funzioni definite sulla curva affine.

1.2.8. Anelli di coordinate omogenee per curve proiettive. Nel caso di una curva proiettiva $\mathscr{D}$ definita da un polinomio omogeneo $g(X_0,X_1,X_2)$, possiamo considerare il monoide moltiplicativo quoziente $K[\mathscr{D}]=K[X_0,X_1,X_2]_{\mathrm{h}}/(g)$. Naturalmente tra $K[\mathscr{D}]$ e $K[\mathscr{D}^{\mathrm{a}}]$ (o tra $K[\mathscr{C}]$ e $K[\mathscr{C}^{\mathrm{h}}]$) valgono relazioni simili a quelle viste tra anelli di polinomi e monoidi moltiplicativi di polinomi omogenei...

Si osservi invece che non ha senso pensare a $K[\mathscr{D}]$ come insieme di "funzioni" definite sulla curva proiettiva.

1.3. Corpi di funzioni razionali e mappe razionali. Passiamo ora a considerare i corpi dei quozienti degli anelli associati alle curve, e generalizzare le osservazioni precedenti. Consideriamo quindi solo curve irriducibili, in modo che gli anelli di coordinate siano integri.

1.3.1. In primo luogo definiamo $K(\mathscr{C})$ il corpo dei quozienti di $K[\mathscr{C}]$, che chiameremo il corpo delle funzioni razionali sulla curva affine $\mathscr{C}$. Dall'osservazione preliminare fatta, risulta che il corpo $K(\mathscr{C})$ è isomorfo al corpo $\mathscr{Q}_0(K[\mathscr{C}^{\mathrm{h}}])$, cioè al corpo dei quozienti di grado nullo di elementi di $K[\mathscr{C}^{\mathrm{h}}]$. Parleremo quindi di corpo delle funzioni razionali indifferentemente per curve affini o proiettive; si faccia tuttavia attenzione che l'anello delle coordinate affini è contenuto nel corpo delle funzioni razionali, mentre il monoide delle coordinate omogenee non è propriamente contenuto (per esempio $T_1,T_2\in K[\mathscr{C}]\subseteq K(\mathscr{C})$, mentre $X_0,X_1,X_2\in K[\mathscr{C}^{\mathrm{h}}]$, tuttavia $X_0,X_1,X_2\notin K(\mathscr{C})$, ma per i quozienti: $X_i/X_j\in K(\mathscr{C})$).