Capitolo V

♠ Studio birazionale delle Curve

In questo capitolo cominciamo uno studio intrinseco delle curve, occupandoci cioè di proprietà delle curve che non dipendono dalla loro immersione in uno spazio ambiente come il piano proiettivo.

Avvertenza: questo capitolo non è mai stato svolto nel corso, e il suo contenuto è di solito affrontato per curve algebriche complesse, da un punto di vista analitico, nei corsi che trattano di Superficie di Riemann (compatte), nel qual caso la trattazione è più intuitiva e la prima definizione di genere è quella topologica, più vicina all'intuizione geometrica. Questo capitolo può provocare gravi danni nel lettore incauto e/o impreparato (sì, se non erano già stati provocati dai capitoli precedenti).

1. Funzioni sulle curve e mappe tra curve.

1.1. Affinizzazione/Omogeneizzazione per funzioni razionali. Conosciamo già le operazioni di omogeneizzazione e disomogeneizzazione tra l'anello di polinomi in più indeterminate $K[\underline{T}] = K[T_1, \dots, T_n]$ e il monoide moltiplicativo di polinomi omogenei in più indeterminate $K[\underline{X}]_{\mathrm{h}} = K[X_0, X_1, \dots, X_n]_{\mathrm{h}}$ (osserviamo tra parentesi che questo insieme è unione quasi-disgiunta in un senso ovvio di sottinsiemi che sono gruppi additivi, la cui somma diretta restituisce l'anello dei polinomi in $n+1$ indeterminate). Vogliamo ora estendere queste operazioni ai quozienti di polinomi.

1.1.1. Introduciamo prima di tutto il corpo dei quozienti di grado nullo di $K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$: si indica con $\mathscr{Q}_0(K[\underline{X}]_{\mathrm{h}})$ ed è formato dai "quozienti" g_1/g_0 di elementi dello stesso grado di $K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$. Precisamente consideriamo nell'insieme delle coppie (g_1, g_0) con $g_1, g_0 \in K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$, $g_0 \neq 0$ e $\deg g_1 = \deg g_0$, l'usuale relazione di equivalenza: $\mathscr{Q}_0(K[\underline{X}]_{\mathrm{h}})$ è allora l'insieme quoziente per questa relazione. Non è sorprendente che $\mathscr{Q}_0(K[\underline{X}]_{\mathrm{h}})$ sia un monoide moltiplicativo (visto che lo era $K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}$, e il prodotto passa facilmente a quoziente). Va invece osservato che $\mathscr{Q}_0(K[\underline{X}]_{\mathrm{h}})$ ammette una operazione di somma indotta in modo ovvio dalla somma di frazioni razionali, e che con tale operazione risulta essere un corpo. Si verifichi quanto detto, e si osservi anche che il corpo $\mathscr{Q}_0(K[\underline{X}]_{\mathrm{h}})$ non va confuso con il corpo quoziente di $K[\underline{X}]$ o con il corpo dei quozienti di grado zero di $K[\underline{X}]$.

1.1.2. Possiamo allora introdurre le due operazioni

$$\mathrm{h} : K(\underline{T}) \longrightarrow \mathscr{Q}_0(K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}) \qquad \mathrm{a} : \mathscr{Q}_0(K[\underline{X}]_{\mathrm{h}}) \longrightarrow K(\underline{T})$$

definite da: $\varphi(T_1, \dots, T_n)^{\mathrm{h}} = X_0^{\deg \varphi} \varphi\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_1}{X_0}\right)$ se $\varphi = f_1/f_0$ è elemento di $K(\underline{T})$ e poniamo $\deg \varphi = \deg f_1 - \deg f_0$; e $\psi(X_0, X_1, \dots, X_n)^{\mathrm{a}} = \psi(1, T_1, \dots, T_n)$ se $\psi = g_1/g_0$ è elemento di $\mathscr{Q}_0(K[\underline{X}]_{\mathrm{h}})$.

Si faccia attenzione a questo: l'operazione di affinizzazione tra funzioni razionali semplicemente estende quella tra polinomi, mentre l'operazione di omogeneizzazione non è "fare il quoziente tra i polinomi omogeneizzati" (non sarebbe ben definita!).

1.1.3. È un facile esercizio verificare che *le due operazioni introdotte sono degli isomorfismi di corpi una inversa dell'altra*. Quindi la situazione è nettamente migliore che nel caso degli anelli di polinomi.

1.2. Anelli di coordinate affini e mappe polinomiali. Consideriamo una curva piana affine $\mathscr{C}$ di equazione $f(X, Y)$ in un fissato riferimento. Poiché possiamo considerare l'anello dei polinomi $K[X, Y]$ quale "insieme delle funzioni polinomiali" sul piano affine $\mathbb{A}^2(K)$, cerchiamo di dare una struttura analoga per la curva $\mathscr{C}$.

1.2.1. *Diciamo anello delle coordinate di $\mathscr{C}$ oppure anello delle funzioni polinomiali su $\mathscr{C}$ l'anello quoziente $K[\mathscr{C}] = K[X, Y]/(f)$.* La duplice terminologia dovrebbe essere chiara da un lato perché possiamo considerare $K[X, Y]$ come anello $K[\mathbb{A}^2(K)]$ delle coordinate, o delle funzioni polinomiali, del piano, dall'altro perché il quoziente si ottiene esattamente identificando espressioni la cui differenza è identicamente nulla sulla curva $\mathscr{C}$.