4.11. Curve autoduali. Esistono per ogni grado curve (eventualmente razionali) che siano autoduali (a meno di proiettività, cioè proiettivamente equivalenti alle proprie duali)? Esplicitare i casi di cubiche e quartiche.

4.12. Dove si scopre che il Quadrifoglio è razionale. Studiare il quadrifoglio, di equazione $(X^2+Y^2)^3 = 4X^2Y^2$ seguendo queste linee:

(1) possiede un punto quadruplo nell'origine (centro di quattro rami lineari a due a due con la stessa tangente), e due cuspidi ordinarie nei punti ciclici della retta impropria con tangente comune la retta impropria.

(2) dallo studio dei posti, dedurre che la classe del quadrifoglio è 8.

(3) calcolando l'hessiana, e sfruttando la biquadraticità di quadrifoglio ed hessiana, determinare i flessi del quadrifoglio: si tratta di 8 punti semplici, nessuno reale; verificare il conteggio sfruttando i posti dei punti singolari.

(4) mostrare che il duale del quadrifoglio ha grado 8, possiede due tacnodi con tangente comune (duali di chi?), un nodo con due posti di flesso (duale di chi?), 8 cuspidi semplici (corrispondenti a?), 8 nodi semplici (corrispondenti a bitangenti del quadrifoglio), e nessun'altra singolarità.

(5) sfruttando le simmetrie del quadrifoglio (biquadraticità e scambio tra X e Y), ed esplorando il triangolo dei monomi di ottavo grado, mostrare che il duale del quadrifoglio deve avere una equazione del tipo

$$a(\xi^6+\eta^6) + b(\xi^4+\eta^4) + c(\xi^2+\eta^2) + \alpha\xi^2\eta^2 + \beta\xi^2\eta^2(\xi^2+\eta^2) + \gamma\xi^4\eta^4$$

e determinare successivamente i sei coefficienti:

(a) usando le tangenti verticali del quadrifoglio, mostrare che a, b, c sono proporzionali a $2^{12}, 2^7 3^3, 3^6$;

(b) usando le tangenti del quadrifoglio parallele ad una bisettrice, determinare anche i valori di α, β, γ.

(6) Mostrare che il quadrifoglio è una curva razionale (anche se non è di deficienza nulla...); si suggeriscono due vie:

(a) usando la sostituzione $X = U + V$ e $Y = i(U - V)$, l'equazione diventa $(4UV)^3 = -4(U^2 - V^2)^2$, e intersecando con il fascio di cubiche di equazione $(U^2 - V^2) = \lambda U^2 V$, si trovano equazioni "lineari" in U, V. Ritornando indietro si ottiene per il quadrifoglio una parametrizzazione del tipo

$$\begin{pmatrix} 2^5\lambda^3 \\ i(1-4\lambda^2)(1+4\lambda^2)^2 \\ -(1-4\lambda^2)^2(1+4\lambda^2) \end{pmatrix}$$

(b) cercare un fascio di cubiche che abbia l'origine come punto doppio con tangenti quelle del quadrifoglio, che passi per i punti all'infinito del quadrifoglio (le due cuspidi) e passi per un ulteriore punto del quadrifoglio: per esempio il punto $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Di conseguenza, l'intersezione con il quadrifoglio vede 12 volte l'origine, 2 volte ciascuno i punti impropri, e l'ulteriore punto: quindi resta variabile un solo altro punto... Il fascio di cubiche ha equazione

$$\alpha X_1(X_1^2 + X_2^2 - \sqrt{2}X_0X_2) + \beta X_2(X_1^2 + X_2^2 - \sqrt{2}X_0X_1) = 0$$

e la parametrizzazione del quadrifoglio che ne risulta è

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}(\alpha^2+\beta^2)^3 \\ (\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)^2(\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta) \\ (\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)(\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta)^2 \end{pmatrix}$$

(cosa c'entra con quella di prima?).

(7) Disegnare quadrifoglio e duale...