Osserviamo in via preliminare che $m_{\mathfrak{Q}}(r) = m_{\mathfrak{Q}}(l_P^{m_P}) = m_P(f,g)$ (la retta ℓ_P non è tangente a $\mathscr{C}$). Abbiamo

$$m_{\mathfrak{Q}}(t) = m_{\mathfrak{Q}}(vh - qf) = m_{\mathfrak{Q}}(vh) = m_{\mathfrak{Q}}(v) + m_{\mathfrak{Q}}(h) \ .$$

Ora, se $Q = P$ abbiamo

$$m_{\mathfrak{P}}(t) = m_{\mathfrak{P}}(h) \geqslant m_{\mathfrak{P}}(g)$$

per ipotesi (in effetti è proprio $m_{\mathfrak{P}}(v) = 0$, anche se non ci serve), mentre se $Q \neq P$ abbiamo $\mathfrak{Q} \notin \mathscr{D}$, cioè $m_{\mathfrak{Q}}(g) = 0$, da cui $m_{\mathfrak{Q}}(v) = m_{\mathfrak{Q}}(vg) = m_{\mathfrak{Q}}(uf + vg) = m_{\mathfrak{Q}}(r) = m_P(f,g)$ e allora

$$m_{\mathfrak{Q}}(t) = m_{\mathfrak{Q}}(v) + m_{\mathfrak{Q}}(h) \geqslant m_P(f,g) \ .$$

Conclusione: per ogni posto $\mathfrak{Q} \gtrdot Q \in \ell_P \cap \mathscr{C}$ abbiamo $m_{\mathfrak{Q}}(t) \geqslant m_P$. Supponiamo allora che l_P^s divida esattamente t con $s < m_P$; ne segue che $t = l_P^s t'$ e $m_{\mathfrak{Q}}(t') \geqslant m_P - s > 0$, da cui $m_Q(t') > 0$ e $m_P(t') \geqslant m_P(\mathscr{C})$ (perché?). Quindi t' contiene almeno $\deg\mathscr{C}$ punti di l_P (contati con le molteplicità: $\deg\mathscr{C} - m_P\mathscr{C}$ punti semplici e il punto P con molteplicità almeno $m_P\mathscr{C}$) e il suo grado in X_2 è minore di $\deg\mathscr{C}$, assurdo. □

4. Problemi.

4.1. Sulle serie. Si dimostri che se $f \in 1 + XK[\![X]\!]$ allora anche $\frac{1}{f} \in 1 + XK[\![X]\!]$, dando una espressione per l'inverso moltiplicativo di $1 + Xg(X)$ (con $g(0) \neq 0$).

Usando i ben noti sviluppi di $\sin X$ e $\cos X$, si trovino gli inversi per composizione (analogamente a quanto visto per esponenziale e logaritmo formali).

4.2. È vero che una quartica con un ecsnodo è sempre razionale? È vero che una quartica con un tacnodo può essere razionale? E una con un tacnodo e una cuspide? E una con un tacnodo e un nodo? Invece le quartiche con due tacnodi sono sempre riducibili. Ci si faccia uno schema generale delle singolarità possibili per quartiche razionali e per quartiche riducibili.

4.3. Ci si faccia uno schema generale delle singolarità possibili per quintiche razionali e per quintiche riducibili.

4.4. Vi sono 10 tipi di quartiche irriducibili aventi come singolarità solo nodi e cuspidi ordinarie. Per ciascuna se ne trovino classe e numero di flessi.

4.5. Scrivere l'esercizio precedente per le quintiche.

4.6. Studiare intorni e posti delle singolarità delle parabole generalizzate di grado n. In particolare, mostrare che si tratta di un posto di molteplicità $n-1$ e classe 1 (quindi una $(n-1)$-cuspide ordinaria). Verificare che le parabole generalizzate hanno classe n, e $n-2$ flessi contati con le molteplicità. Com'è fatta la curva duale di una parabola generalizzata? In particolare, è una parabola generalizzata? Mostrare che, genericamente, una parabola generalizzata ha $\frac{n^2-5n+6}{2}$ bitangenti.

Esplicitare i casi di $Y = X^n$ e di $Y = X^n + 1$.

4.7. Studiare intorni e posti delle singolarità delle ipergeometriche (distinguendo i gradi pari e dispari). In particolare, mostrare che il punto singolare nel caso pari è centro di due posti (entrambi di ordine $\frac{n}{2} - 1$ e classe 1, con la tangente in comune), e nel caso dispari è centro di un unico posto (ordine $n-2$ e classe 2). In ogni caso la classe della curva è $2n$, e i flessi contati con molteplicità risultano $4(n-1)$.

Si consideri in particolare il caso $Y^2 = X^n - 1$.

4.8. Studiare i posti delle singolarità di molteplicità due (punti doppi), distinguendo supernodi e supercuspidi: vi può essere un solo posto (necessariamente di molteplicità 2) di classe 1 (cuspide semplice) oppure > 1 (cuspidi superiore), oppure due posti diversi (necessariamente entrambi di molteplicità 1; nel caso di quartiche hanno anche necessariamente classe 1), e bisognerà distinguere a seconda che abbiano tangenti distinte (punti doppi ordinari) o coincidenti (supernodi) e delle classi.

Nel caso di quartiche si dovrebbero trovare sei casi possibili: nodo, cuspide semplice, un paio di supernodi, un paio di supercuspidi. Determinare nei vari casi i contributi alle formule di Plücker.

4.9. Scrivere l'esercizio precedente per i punti tripli.

4.10. Studiare intorni e posti delle singolarità del nefroide di equazione $4(X^2+Y^2+1)^3 = 27Y^2$.