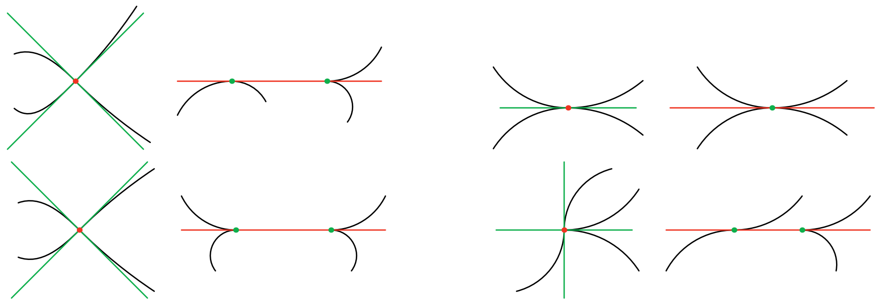

3.3.4. Relazioni di Plücker duali e conseguenze varie. A questo punto le relazioni di Plücker (per curve con solo nodi e cuspidi, flessi semplici e bitangenti) che avevamo enunciato parlando di curve duali, e le prime due dimostrate nella teoria dell'intersezione, si possono ottenere completamente applicando le prime due formule alla curva duale. Le riscriviamo qui nel caso di curve (di ordine d e classe c) con solo nodi (τ), cuspidi (κ), bitangenti (b) e flessi (f):

$$\begin{matrix} c = d(d-1) - 2\tau - 3\kappa & & d = c(c-1) - 2b - 3f \\ & \text{e} & \\ f = 3d(d-2) - 6\tau - 8\kappa & & \kappa = 3c(c-2) - 6b - 8f \ . \end{matrix}$$

In particolare possiamo ricavare b in termini di τ, κ, f?

Quando una curva e la duale possono avere le stesse caratteristiche di Plücker? Si (dimostri e si) tenga presente che

$$f - \kappa = 3(c-d) \qquad \text{e} \qquad 2(b-\tau) = (c-d)(c+d-9) \ .$$

♠ **3.4.** Teorema di Noether (versione moderna). Possiamo ora dare un enunciato più generale del teorema di Noether già più volte visitato.

3.4.1. Teorema. *Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ due curve senza componenti comuni e supponiamo che ogni posto $\mathfrak{P}$ di $\mathscr{C}$ con $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{D}) > 0$ (cioè di centro $P \in \mathscr{D}$) abbia centro in un punto multiplo ordinario per $\mathscr{C}$. Allora, se f e g sono le equazioni di $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ rispettivamente, una curva $\mathscr{H}$ di equazione h si scrive $h = af + bg$ se e solo se per ogni posto $\mathfrak{P}$ come sopra si ha che*

$$m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{H}) \geqslant m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{D}) + m_P(\mathscr{C}) - 1 \ .$$

In tal caso il polinomio b definisce una curva $\mathscr{B}$ tale che per ogni posto $\mathfrak{P}$ come sopra risulta $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{B}) \geqslant m_P(\mathscr{C}) - 1$, e dunque $m_P(\mathscr{B}) \geqslant m_P(\mathscr{C}) - 1$.

Dimostrazione. Essenzialmente ricalca quella vista per la forma semplice, e procediamo con un copia-incolla-modifica. Una implicazione è banale. Per l'altra, supponiamo scelto un riferimento proiettivo tale che $\mathscr{C}$ non contenga il punto improprio delle ordinate (e quindi il suo grado in X_2 coincida con il suo grado totale) e inoltre nessuna retta del fascio per il punto improprio delle ordinate sia dei seguenti (finiti) insiemi:

(1) rette congiungenti punti di $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$;
(2) tangenti a $\mathscr{C}$ o $\mathscr{D}$ nei punti $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$;
(3) tangenti a $\mathscr{C}$ spiccate dai punti $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$;
(4) rette congiungenti punti di $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ con punti singolari di $\mathscr{C}$.

Allora basta mostrare che se $r = uf + vg$ (scrittura canonica del risultante) e $vh = qf + t$ (divisione euclidea, possibile perché il coefficiente di grado massimo in X_2 di f è costante; si noti che il grado di t in X_2 è strettamente minore di quello di f) allora r divide t (cioè $vh \in (f, r)$, che equivale a $h \in (f, g)$).

Osserviamo che r è una collezione (con molteplicità) di rette per il punto improprio delle ordinate, ciascuna delle quali contiene un unico punto $P \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}$, sia ℓ_P, che si presenta esattamente con molteplicità $m_P = m_P(\mathscr{C}, \mathscr{D}) = \sum_{\mathscr{C} \ni \mathfrak{P} \gtrdot P} m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{D})$. Quindi $r = \prod_P l_P^{m_P}$, e basta mostrare che ogni fattore $l_P^{m_P}$ divide t.

Studiamo le molteplicità $m_{\mathfrak{Q}}(t)$ per ogni $\mathfrak{Q} \lessdot Q \in \ell_P \cap \mathscr{C}$ (per le ipotesi fatte sul riferimento vi sono esattamente $\deg \mathscr{C} - m_P(\mathscr{C}) + 1$ punti distinti, di cui uno è P, e, tranne eventualmente P che ha esattamente $m_p(\mathscr{C})$ posti distinti, sono tutti ordinari, dunque centri di un'unico posto $\mathfrak{Q} \in \mathscr{C}$).