una parametrizzazione, e quindi dovremmo mostrarne l'"invarianza" rispetto a proiettività, ovvero a cambiamenti di coordinate. In realtà la definizione fa riferimento ad una scelta delle coordinate nel piano duale legata alla polarità della conica di matrice identica; quindi l'invarianza riguarda solo proiettività associate a matrici T tali che $T^{\mathrm{t}}T = \lambda\mathbb{I}$ (con $\lambda \neq 0$), matrici conformi, e deriva subito dalla definizione di prodotto vettore.

3.3.1. Molteplicità e classe, centri e tangenti. Se $\mathfrak{P}$ è di ordine r e classe s, allora ha parametrizzazione del tipo $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1+X^r \\ a_2+aX^r+bX^{r+s}+\cdots \end{pmatrix}$ da cui si vede che il centro è $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ e le coordinate pluckeriane della tangente sono $\begin{pmatrix} aa_1-a_2 \\ -aa_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$ e il suo posto duale ha parametrizzazione

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1+X^r \\ a_2+aX^r+bX^{r+s}+\cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ rX^{r-1} \\ arX^{r-1}+b(r+s)X^{r+s-1}+\cdots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1+X^r \\ a_2+aX^r+bX^{r+s}+\cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a+b(1+s/r)X^s+\cdots \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} aa_1-a_2+a_1(b(1+s/r)X^s+\cdots)+b(s/r)X^{r+s}+\cdots \\ -aa_0-a_0(b(1+s/r)X^s+\cdots) \\ a_0 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che il suo centro è espresso proprio dalle coordinate pluckeriane della tangente di $\mathfrak{P}$, ed ha ordine e classe scambiati rispetto a $\mathfrak{P}$ (forse è meglio fare il conto con centro origine e tangente ordinata...).

Di conseguenza: *se $\mathfrak{P}$ è posto di ordine m e classe c, allora il posto duale $\mathfrak{P}^*$ ha come centro la tangente $t_{\mathfrak{P}}$ ed è di ordine c e classe m. Per simmetria il centro di $\mathfrak{P}$ è il punto di contatto di $\mathfrak{P}^*$ (che per definizione è la tangente di $\mathfrak{P}^*$ nel piano rigato, cioè un punto del piano punteggiato).*

3.3.2. Posti duali e curve duali. *Se $\mathfrak{P}$ è posto di una curva $\mathscr{C}$ allora (e solo allora, per dualità) $\mathfrak{P}^*$ è posto della curva duale $\mathscr{C}^*$.*

Infatti, se $\mathscr{C}$ ha equazione $g(\underline{X}) = 0$, allora la curva duale ha equazione $g^*(\underline{\xi}) = 0$ caratterizzata da: $g^*(\underline{\xi}) = 0$ se e solo se $\underline{\xi} = \nabla g(\underline{X})$ con $\underline{X} \cdot \underline{\xi} = 0$. Ora è evidente per costruzione (ed Eulero) che $\mathfrak{P}\cdot\mathfrak{P}^* = 0 = \mathfrak{P}\cdot\nabla g(\mathfrak{P})$, e per costruzione (e differenziazione di $g(\mathfrak{P}) = 0$) che $\mathfrak{P}'\cdot\mathfrak{P}^* = 0 = \mathfrak{P}'\cdot\nabla g(\mathfrak{P})$, da cui si conclude che (P^* e $\nabla g(\mathfrak{P})$ sono proporzionali, e quindi) $g^*(\mathfrak{P}^*) = 0$, cioè $\mathfrak{P}^*$ annulla g^* e dunque è posto di $\mathscr{C}^*$.

3.3.3. Esempi:

(1) duali dei posti di un nodo (ordine e classe 1) sono due posti semplici (ordine e classe 1) aventi la tangente in comune;
(2) duali dei posti di un punto multiplo ordinario di ordine 1 e classe $r-1$ (significa cosa per la tangente del posto? si tratta di posti di flesso?) sono posti di ordine $r-1$ e di classe 1 (dunque dei posti cuspoidali se $r > 1$) aventi tutti la stessa tangente.
(3) duale del posto di una cuspide ordinaria (ordine 2 e classe 1) è un posto di ordine 1 e classe 2 (un flesso ordinario).
(4) duale del posto di una r-cuspide ordinaria (ordine $r+1$ e classe 1) è un posto di ordine 1 e classe $r+1$ (un flesso d'ordine r).

Naturalmente, per simmetria valgono le considerazioni duali: duale di una bitangente è un nodo ordinario, duale di una m-tangente è un punto m-uplo ordinario, duale di un flesso ordinario è una cuspide ordinaria, duale di un flesso r-uplo è una r-cuspide ordinaria.

Si faccia attenzione al fatto che un punto singolare può nascondere vari tipi di posti, e dar luogo ad una (multi-)tangente della curva duale in punti con diverse caratteristiche. Facciamo qualche esempio tramite disegni: