e la parametrizzazione del flesso (è nell'origine) $\begin{cases} X=t \\ Y=-t^{r+2}+\cdots \end{cases}$. Le facili stime sugli ordini (in $t$) delle entrate della matrice hessiana danno il risultato voluto.

**3.2.** PLÜCKER. Tenendo conto del teorema di struttura di singolarità che lega molteplicità di posti e punti, la classe $d^*$ di una curva $\mathscr{C}$ di grado $d$ e il numero $f$ dei suoi flessi si calcolano in base alle formule

$$d^* = d(d-1) - \sum_{\mathfrak{P}} m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{C}') \qquad \text{e} \qquad f = 3d(d-2) - \sum_{\mathfrak{P}} m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{H})$$

in cui *la somma è estesa ai posti di $\mathscr{C}$ centrati sui punti singolari di $\mathscr{C}$* (cosicché si tiene conto di tutti i contributi dei punti singolari di $\mathscr{C}$ alla intersezione con $\mathscr{C}'$), e ove $\mathscr{C}'$ è una generica prima polare di $\mathscr{C}$ (formule generalizzate di Plücker). "Generica" polare significa una polare che si comporti come "quasi tutte" le altre: la molteplicità $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{C}')$ varia al variare della polare $\mathscr{C}'$, ma al di fuori di un insieme di polari definito da certe condizioni speciali (geometricamente: polari rispetto a punti il cui fascio di rette contiene tangenti nei punti singolari) tale molteplicità è costante, e minima. Si noti in particolare che, nella formula, per ogni posto si possono usare polari diverse, purché generiche (per quel posto)!

Ora ci è agevole calcolare i contributi delle varie singolarità.

**3.2.1.** NODI. Usando parametrizzazione standard $\begin{cases} X=t \\ Y=t^2+\cdots \end{cases}$ e equazione $f = XY + f_{>2}$ otteniamo $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{C}') = 1$ e $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{H}) = 3$. Quindi ogni nodo contribuisce con $-2$ e $-6$ rispettivamente alle due formule generali (si ricordi che un nodo ha due posti lineari, per cui $m_P(\mathscr{C},\mathscr{C}') = 2$ e $m_P(\mathscr{C},\mathscr{H}) = 6$).

**3.2.2.** PUNTI ORDINARI. Consideriamo l'equazione $f = Y\prod_{i=1}^{m-1}(Y-\alpha_i X) + f_{>m}$, e parametrizzazione $\begin{cases} X=t \\ Y=t^2+\cdots \end{cases}$ per l'unico posto $\mathfrak{P}$ con tangente $V(Y)$. Allora $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{C}') = m-1$ e $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{H}) = 3(m-1)$. Dunque, poiché un punto ordinario $m$-uplo possiede $m$ posti, abbiamo $m_P(\mathscr{C},\mathscr{C}') = m(m-1)$ e $m_P(\mathscr{C},\mathscr{H}) = 3m(m-1)$, e tale punto contribuisce con $-m(m-1)$ e $-3m(m-1)$ alle due formule generali.

**3.2.3.** CUSPIDI ORDINARIE. Usando parametrizzazione standard $\begin{cases} X=t^2 \\ Y=t^3+\cdots \end{cases}$ e equazione $f = Y^2 + X^3 + Yf_2 + f_{>3}$ otteniamo $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{C}') = 3$ e $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{H}) = 8$. Quindi ogni cuspide contribuisce con $-3$ e $-8$ rispettivamente alle due formule generali (si ricordi che una cuspide ha un solo posto).

**3.2.4.** CUSPIDI SUPERIORI ORDINARIE. Consideriamo l'equazione $Y^r + X^{r+1} + Yf_r + f_{>r}$ e parametrizzazione $\begin{cases} X=t^r \\ Y=t^{r+1}+\cdots \end{cases}$ per l'unico posto di centro l'origine. Allora abbiamo $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{C}') = r^2-1$ e $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{H}) = (3r+2)(r-1)$. Quindi ogni cuspide ordinaria di molteplicità $r$ (diremo una $(r-1)$-cuspide ordinaria) contribuisce con $-(r+1)(r-1)$ e $-(3r+2)(r-1)$ rispettivamente alle due formule generali (si ricordi che anche cuspidi superiori hanno un solo posto).

**3.2.5.** Quindi nel caso di curve aventi solo punti multipli ordinari e cuspidi ordinarie, possiamo specializzare le formule generalizzate di Plücker nel modo seguente:

$$d^* = d(d-1) - \sum_{P \text{ ordinari}} m_P(m_P-1) - \sum_{Q \text{ cuspidi ordinarie}} (r_Q^2 - 1)$$

e

$$f = 3d(d-2) - \sum_{P \text{ ordinari}} 3m_P(m_P-1) - \sum_{Q \text{ cuspidi ordinarie}} (3r_Q+2)(r_Q-1)$$

ove $m_P$ indica la molteplicità del punto ordinario $P$ e $r_Q$ indica la molteplicità della cuspide ordinaria $Q$. In particolare (ri)troviamo le prime due formule di Plücker, nel caso vi siano solo nodi e cuspidi ordinarie.

**3.2.6.** TACNODO. Si consideri l'equazione $Y^2 + Yf_2 + X^4 + Yf_3 + f_{>4}$ e usiamo la parametrizzazione $\begin{cases} X=t \\ Y=\alpha t^2+\cdots \end{cases}$ per uno dei due posti nell'origine. Supponiamo che $\alpha$ non sia radice doppia del polinomio che la definisce (qual'è?). Allora risulta $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{C}') = 2$ e $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{H}) = 6$. Dunque un tacnodo contribuisce alle formule generali con $-4$ e $-12$ (vi sono due posti, per cui $m_P(\mathscr{C},\mathscr{C}') = 4$ e $m_P(\mathscr{C},\mathscr{H}) = 12$). Che succederebbe se la condizione posta non fosse realizzata?

**3.3.** POSTI DUALI. Possiamo ora fare uno studio preciso delle curve duali.
Il duale $\mathfrak{P}^*$ di un posto $\mathfrak{P}$ è definito come $\mathfrak{P}\times\mathfrak{P}'$, ove si è scelta una parametrizzazione di $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{P}'$ è la derivata (componente per componente) rispetto al parametro. Si noti che mentre la definizione di curva duale non fa riferimento ad alcuna scelta di coordinate, qui definiamo il duale di un posto scegliendone