3. Studio delle intersezioni di curve (e applicazioni: Plücker, duali, Noether).

3.1. Teorema (Molteplicità di intersezione e posti). *Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ due curve senza componenti comuni, e sia P un punto comune; abbiamo che*

$$\sum_{\mathscr{C}\ni\mathfrak{P}\geqslant P} m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{D}) = \sum_{\mathscr{D}\ni\mathfrak{Q}\geqslant P} m_{\mathfrak{Q}}(\mathscr{C})$$

ovvero la somma delle molteplicità di $\mathscr{D}$ nei posti di $\mathscr{C}$ di centro P coincide con la somma delle molteplicità di $\mathscr{C}$ nei posti di $\mathscr{D}$ di centro P. Inoltre questo numero coincide con la molteplicità di intersezione $m_P(\mathscr{C},\mathscr{D})$ delle due curve nel punto P.

Dimostrazione. Consideriamo un riferimento in cui P sia l'origine, e il punto improprio delle ordinate non appartenga alle curve e l'asse delle ordinate non contenga altri punti di intersezione delle due curve. Allora le equazioni $f(X,Y)$ e $g(X,Y)$ delle curve hanno grado in Y pari al grado delle loro equazioni, e consideriamo le fattorizzazioni $f(X,Y)=\prod_i(Y-f_i(X))$ e $g(X,Y)=\prod_j(Y-g_j(X))$ in $K(((X)))[Y]$. Con le seguenti uguaglianze (e quelle invertendo i ruoli di f e g) dimostriamo tutto:

$$\begin{aligned}\sum_{\mathscr{C}\ni\mathfrak{P}\geqslant P} m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{D}) &= \sum_{\mathscr{C}\ni\mathfrak{P}\geqslant P} \mathrm{ord}_T g(\mathfrak{P})\\ &= \sum_{\mathscr{C}\ni\mathfrak{P}\geqslant P} \mathrm{ord}_T g(T^{s_{\mathfrak{P}}}, f_{\mathfrak{P}}(T))\\ &= \sum_i \mathrm{ord}_X g(X, f_i(X))\\ &= \sum_i \mathrm{ord}_X \prod_j (f_i(X)-g_j(X))\\ &= \mathrm{ord}_X \prod_i\prod_j (f_i(X)-g_j(X))\\ &= \mathrm{ord}_X R_Y(f,g)\end{aligned}$$

(c'era bisogno di distinguere i rami con centro in P dagli altri, cioè i fattori che si annullano in P dagli altri?). Per capire bene il terzo passaggio (dalla sommatoria sui posti a quella sulle radici), si tenga presente che per ogni posto $\mathfrak{P}$ del tipo $\binom{X}{Y}=\binom{T^{s_{\mathfrak{P}}}}{f_{\mathfrak{P}}(T)}$ corrispondono $s_{\mathfrak{P}}$ zeri del tipo $f_{\mathfrak{P}}(X^{1/s_{\mathfrak{P}}})$ e che $\mathrm{ord}_X g(X, f_{\mathfrak{P}}(X^{1/s_{\mathfrak{P}}})) = \frac{1}{s_{\mathfrak{P}}}\mathrm{ord}_T g((T^{s_{\mathfrak{P}}}, f_{\mathfrak{P}}(T))$. □

3.1.1. Osservazioni su Bézout. Il teorema precedente dà dunque un'altra definizione della molteplicità di intersezione di due curve in un punto che permette di dimostrare il teorema di Bézout. Poiché la definizione di molteplicità di intersezione in termini di posti è molto vicina a quella usata per le curve razionali (sostituzione di una espressione parametrica in una curva, e valutazione dell'ordine di zero), questo giustifica, a posteriori, la definizione data in termini di risultante.

3.1.2. Ricordando che per ogni posto $\mathfrak{P}$ e ogni curva $\mathscr{D}$ vale $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{D}) \geqslant m_P(\mathscr{D})m_{\mathfrak{P}}$ (e l'uguaglianza se $t_{\mathfrak{P}}$ non è tangente a $\mathscr{D}$), sommando sui posti di $\mathscr{C}$ di centro P otteniamo facilmente la disuguaglianza fondamentale $m_P(\mathscr{C},\mathscr{D}) \geqslant m_P(\mathscr{D})m_P(\mathscr{C})$, e che vale l'uguaglianza se e solo se non vi sono tangenti comuni alle due curve in P.

3.1.3. Un'altra facile asserzione è la seguente (si userà per il teorema di Noether). Se P è un punto m-uplo ordinario per $\mathscr{C}$ e per ognuno degli m posti $\mathfrak{P}$ di $\mathscr{C}$ di centro P abbiamo $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{D}) \geqslant s$ con $s \leqslant m$, allora $m_P(\mathscr{D}) \geqslant s$ (cioè $\mathscr{D}$ ha P come punto almeno s-uplo). Infatti, se fosse $s > m_P(\mathscr{D})$, allora tutte le tangenti $t_{\mathfrak{P}}$ (che sono m distinte) dovrebbero essere tangenti a $\mathscr{D}$ in P, che però potrebbe avere al più $m_P(\mathscr{D}) < s \leqslant m$ rette nel complesso tangente in P.

3.1.4. Flessi r-upli. Potendo calcolare la molteplicità di intersezione in un flesso di una curva $\mathscr{C}$ con l'hessiana $\mathscr{H}$ tramite la molteplicità dell'hessiana su quel posto, possiamo ora mostrare facilmente che un punto semplice P è di flesso r-uplo (cioè la tangente ha molteplicità di intersezione $r{+}2$) se e solo se $m_P(\mathscr{C},\mathscr{H}) = r$.

Infatti in un opportuno riferimento l'equazione della curva sarà del tipo

$$Y(1{+}f_1{+}\cdots{+}f_r) + X^{r+2} + Y f_{r+1} + f_{r+3} + \cdots$$