2.2. Teorema (Esistenza di posti nei punti di una curva). *Ogni punto di una curva è centro di almeno un posto della curva.*

Dimostrazione. Pensarci: è una conseguenza del teorema di Newton. Segue comunque dal prossimo teorema □

2.2.1. Si noti invece che è quasi banale che ogni posto di una curva abbia centro in un punto della curva...

2.3. Teorema (Struttura dei punti singolari). *Sia P un punto della curva $\mathscr{C}$, e sia scelto un riferimento in cui P sia l'origine usuale e l'asse delle ascisse non sia tangente alla curva; allora abbiamo una corrispondenza biunivoca tra i posti di $\mathscr{C}$ di centro P e i fattori irriducibili di f in $K((X))[Y]$ che si annullano in P, ed in tale corrispondenza l'ordine di un posto uguaglia il grado in Y del fattore corrispondente. Dunque abbiamo:*

(1) P è semplice per $\mathscr{C}$ se e solo se esso è centro di un unico posto lineare $\mathfrak{P}$ di $\mathscr{C}$, e in tal caso la tangente in P a $\mathscr{C}$ è la tangente di $\mathfrak{P}$;

(2) P è singolare se e solo se è centro di un posto non lineare o di più di un posto di $\mathscr{C}$; in tal caso abbiamo che

$$m_P(\mathscr{C}) = \sum_{\mathscr{C}\ni\mathfrak{P}\geqslant P} m_{\mathfrak{P}}$$

ovvero la molteplicità di un punto su una curva è pari alla somma delle molteplicità dei posti della curva con centro quel punto. Inoltre le tangenti in P a $\mathscr{C}$ corrispondono con le loro molteplicità alle tangenti dei posti di $\mathscr{C}$ di centro P: la molteplicità di una tangente t è la somma delle molteplicità $m_{\mathfrak{P}}$ dei posti di $\mathscr{C}$ in P con tangente $t_{\mathfrak{P}} = t$.

Dimostrazione. Per la prima asserzione, si veda la Morale del paragrafo zero. Per il resto, segue tutto dal fatto che il calcolo di intersezione in un punto della curva con una retta del fascio per il punto si fa guardando l'ordine di annullamento nel punto del sistema retta-curva. Esplicitamente? □

2.4. Teorema (esclusività dei posti di una curva). *Due curve senza componenti comuni non possono avere posti in comune.*

Dimostrazione. Se avessero posti in comune, il loro risultante sarebbe nullo, e quindi avrebbero fattori comuni non banali, cioè componenti comuni. □

2.4.1. In particolare: se una curva ha ordine infinito in un posto di un'altra curva, allora le due curve hanno una componente comune.

2.4.2. Ogni posto di una curva irriducibile determina l'intera curva! è vero che ogni posto determina una curva?

2.5. Esempi. Riprendiamo gli esempi del paragrafo precedente, per cui conosciamo già la situazione algebrica (poligoni di Newton e fattorizzazioni) ed esploriamo la situazione geometrica.

2.5.1. nodo: vi sono due rami lineari di classe 1 con parametrizzazioni $\binom{X}{\pm X\sum_i\binom{1/2}{i}X^i}$;

2.5.2. cuspide: vi è un solo ramo, di ordine 2 e classe 1 con parametrizzazione $\binom{X^2}{X^3}$;

2.5.3. altra cuspide: vi sono due rami, di cui uno non vede l'origine, e l'altro ha ordine 2 e classe 1 con parametrizzazione $\binom{X^2}{X^3+\frac12X^6+\frac58X^9+\cdots}$;

2.5.4. bifoglio: vi sono due rami, entrambi di ordine 1 e classe 2, di cui uno con parametrizzazione $\binom{X}{X^3+X^{11}+\cdots}$ e l'altro con parametrizzazione non normalizzata $\binom{X^3}{X+\frac12X^9+\cdots}$;

2.5.5. altro bifoglio: vi sono quattro rami, di cui due non vedono l'origine, e gli altri due sono lineari di classe 1.

2.5.6. trifoglio: quattro rami, uno non vede l'origine; gli altri sono di ordine 1 e classe 1;

2.5.7. quadrifoglio: vi sono quattro rami tutti di ordine 1 e classe 1;

2.5.8. iperellittiche pari: due rami, entrambi di ordine $n-1$ e classe 1.

2.5.9. iperellittiche dispari: un solo ramo, di ordine $2n-1$ e classe 2.

2.5.10. parabole generalizzate?