1.2. Definizione (Posti). *Un posto $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(X)$ di $\mathbb{P}^n(K)$ è una classe di equivalenza (di parametrizzazioni) di rami primitivi di $\mathbb{P}^n(K)$. Il centro di un posto è il centro di un qualunque ramo che gli appartiene, e scriveremo $P \lessdot \mathfrak{P}$ per intendere che P è il centro di $\mathfrak{P}$.*

1.2.1. Nota terminologica. Talvolta i posti sono chiamati rami, e i rami sono chiamati parametrizzazioni di rami. Io preferirei chiamare germogli (dello spazio) i rami, e germi (di ipersuperficie) i posti.

1.2.2. Posti di una ipersuperficie. Un posto $\mathfrak{P}$ si dice appartenere ad una ipersuperficie $\mathscr{C}$ se una (e allora ogni) sua parametrizzazione annulla l'ipersuperfice. Dunque un posto di una ipersuperficie è un punto (a coordinate in $K[\![X]\!]$ invece di K) di quella ipersuperficie; in un certo senso i posti vanno considerati come "raffinamenti" dei punti che permettono uno studio locale delle ipersuperficie. Per abuso di linguaggio si scrive $\mathfrak{P} \in \mathscr{C}$; ovviamente, se $\mathfrak{P} \in \mathscr{C}$ e $P \lessdot \mathfrak{P}$ allora $P \in \mathscr{C}$.

1.3. Definizione (Molteplicità (d'intersezione) di un posto con una ipersuperficie). *Data una ipersuperficie $\mathscr{C}$ e un posto $\mathfrak{P}$, siano $g(\underline{X})$ e $\mathfrak{P}(X)$ equazione e parametrizzazione rispettive in un fissato sistema di riferimento. Definiamo l'ordine di intersezione di $\mathfrak{P}$ con $\mathscr{C}$ come l'ordine nel parametro X nell'espressione $g(\mathfrak{P}(X))$, e scriveremo*

$$m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{C}) := \mathrm{ord}_X g(\mathfrak{P}(X))$$

Si osservi che la definizione è indipendente dalla scelta delle coordinate e dalla parametrizzazione del posto.

1.3.1. Il posto $\mathfrak{P}$ appartiene all'ipersuperficie $\mathscr{C}$ se e solo se $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{C}) = \infty$ (corrisponde a $g(\mathfrak{P}(X)) = 0$ in $K[\![X]\!]$).

2. Studio delle singolarità di curve.

D'ora in poi ci poniamo nel piano proiettivo.

2.1. Definizione-Teorema (Molteplicità (Ordine) e classe di un posto nel piano). *Quando l varia sul fascio di rette per il centro P di $\mathfrak{P}$, le molteplicità $m_{\mathfrak{P}}(l)$ sono tutte uguali, sia $m_{\mathfrak{P}}$, tranne che per una unica retta $t_{\mathfrak{P}}$ che si dice la retta tangente a $\mathfrak{P}$ per la quale si ha $m_{\mathfrak{P}}(t_{\mathfrak{P}}) > m_{\mathfrak{P}}$. L'intero positivo $m_{\mathfrak{P}}$ si dice ordine o molteplicità di $\mathfrak{P}$. La differenza $c_{\mathfrak{P}} = m_{\mathfrak{P}}(t_{\mathfrak{P}}) - m_{\mathfrak{P}}$ si dice classe di $\mathfrak{P}$.*

Dimostrazione. Scegliendo opportunamente riferimento e parametrizzazione, possiamo supporre che il ramo sia $\mathfrak{P}(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ X^m \\ aX^m + a_1X^{m_1} + a_2X^{m_2} + \cdots \end{pmatrix}$ con $m < m_1 < m_2 < \cdots$, e dunque centrato in $\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le rette di equazione $\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 = 0$ hanno allora molteplicità di intersezione con $\mathfrak{P}$ data da $\mathrm{ord}_X(\alpha_1X^m + \alpha_2(aX^m + a_1X^{m_1} + a_2X^{m_2} + \cdots))$ che è evidentemente m, a meno che non sia $\alpha_1 + a\alpha_2 = 0$. Dunque tutte le rette hanno la stessa molteplicità di intersezione, tranne quella di coordinate plückeriane $\begin{pmatrix} 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$ che è l'unica tangente cercata. □

2.1.1. La classe di un posto può essere infinito, ma capita se e solo se il posto appartiene ad una retta.

2.1.2. Posti lineari. Un posto si dice lineare se è di molteplicità 1. Un tale posto ha parametrizzazione standard del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ X \\ aX + bX^s + \cdots \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$ (tangente di coordinate plückeriane $\begin{pmatrix} 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$) e la sua classe è $s-1$. In particolare si tratta di un posto lineare di classe 1 se e solo se $s = 2$.

2.1.3. Posti di molteplicità maggiore. Un posto di molteplicità m ha parametrizzazione standard del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ X^m \\ aX^m + bX^{m+c} + \cdots \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$ ed è primitivo se e solo se gli esponenti $m, m+c, \ldots$ non hanno fattori comuni non banali. La tangente ha coordinate plückeriane $\begin{pmatrix} 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$ e la classe è c. Si tratta di un posto di classe 1 se e solo se $c = 1$.

2.1.4. Disuguaglianza fondamentale per i posti. *In particolare si osservi che se $\mathfrak{P}$ è posto di centro P e $\mathscr{C}$ è una curva, allora $m_{\mathfrak{P}}(\mathscr{C}) \geqslant m_P(\mathscr{C})m_{\mathfrak{P}}$ e vale l'uguaglianza se e solo se $t_{\mathfrak{P}}$ non è tangente a $\mathscr{C}$ in P.*

Se il punto P non appartiene alla curva, è ovvia l'uguaglianza; altrimenti si ragiona scegliendo coordinate in modo che P sia l'origine e $\mathfrak{P}(X)$ sia in forma standard.