(2) Considerare $f(X,Y) = (Y - X^2)^2 - X^iY^j$ per $i + j > 4$; quando le soluzioni ramificano?

0.10. Morale. Nei prossimi paragrafi vedremo il senso geometrico di molti degli oggetti e dei risultati presentati sopra. Conviene avere in mente questo: partendo da un polinomio irriducibile in $K[X,Y] = K[X][Y]$, esso ha tutti i suoi zeri in $K(((X)))$, non è necessariamente irriducibile pensato in $K[\![X]\!][Y]$ (i fattori sono determinati vuoi da gruppi di radici in $K(((X)))$, vuoi dai lati del poligono di Newton, ma un lato può determinare più fattori) e la sua fattorizzazione lì avrà un importante significato geometrico per la curva corrispondente, che ci permetterà una comprensione molto fine dei punti singolari.

Se poi $y(X^{1/s})$ è uno zero del polinomio $f(X,Y)$, allora la posizione $X = T^s$ e $Y = y(T)$ dà una "rappresentazione parametrica" per il fattore $\prod_{\zeta^s=1}(Y - y(\zeta X^{1/s}))$ del polinomio dato. Questo passaggio da "soluzioni ad esponenti frazionari" a "parametrizzazioni tramite serie formali" dovrebbe sia motivare le definizioni di carattere geometrico dei prossimi paragrafi, sia mettere nella giusta luce l'armamentario algebrico introdotto a questo scopo.

1. Rami, posti e centri.

1.1. Definizione (Rami). *Un ramo di $\mathbb{P}^n(K)$ è un punto di $\mathbb{P}^n(K((X)))$ non razionale su K, cioè non appartenente a $\mathbb{P}^n(K)$.*

1.1.1. Parametrizzazioni dei rami. Ogni ramo $P(X)$ ammette una parametrizzazione tale che $\mathrm{ord}_X P_i(X) \geqslant 0$ per ogni $i = 0, \ldots, n$ ed esiste un indice i_0 tale che $\mathrm{ord}_X P_{i_0}(X) = 0$; infatti basta moltiplicare una espressione qualsiasi del ramo per una opportuna potenza del parametro X.

A partire da una parametrizzazione possiamo trovarne un'altra per lo stesso ramo tale che $P_{i_0}(X) = 1$ (infatti basta moltiplicare la parametrizzazione data per l'inverso di $P_{i_0}(X)$, che è invertibile in $K[\![X]\!]$). Questo tipo di parametrizzazioni sarà chiamato normale.

1.1.2. Centri dei rami. Se $P(X)$ è un ramo, espresso in una parametrizzazione normalizzata come sopra, chiamiamo centro del ramo il punto $P(0) \in \mathbb{P}^n(K)$. Scriveremo $P \lessdot P(X)$ per intendere che il punto P è il centro del ramo $P(X)$. Esso non dipende dalla rappresentazione scelta, purché normalizzata.

1.1.3. Rami equivalenti. Diremo che due rami sono equivalenti se una (e allora ogni) parametrizzazione di uno dei due si può ottenere tramite una sostituzione d'ordine uno in una parametrizzazione dell'altro. Cioè $P(X) \equiv Q(X)$ se e solo se esiste $\varphi(X) \in K[\![X]\!]$ con $\mathrm{ord}_X \varphi(X) = 1$ tale che $P(X) = Q(\varphi(X))$. Si tratta di una relazione di equivalenza tra rami.

Si noti che rami equivalenti hanno lo stesso centro.

1.1.4. Parametrizzazione speciale. Dato un ramo $P(X)$ (parametrizzazione normalizzata: $P_{i_0}(X) = 1$ e $\mathrm{ord}_X P_i(X) \geqslant 0$) con centro nel punto $P = P(0)$, possiamo trovare un ramo equivalente $Q(X)$ tale che $Q_{i_0}(X) = 1$, $\mathrm{ord}_X Q_i(X) \geqslant 0$ ed esiste un i_1 tale che $Q_{i_1}(X) = P_{i_1}(0) + X^m$ con m minimo tra $\mathrm{ord}_X(P_i(X) - P_i(0))$. Infatti, basta scegliere i_1 tale che $\mathrm{ord}_X(P_{i_1}(X) - P_i(0)) = m$ sia minimo, e comporre la parametrizzazione per l'unica sostituzione $\varphi(X)$ d'ordine uno tale che $Q_{i_1}(\varphi(X)) = P_{i_1}(0) + X^m$ (dimostrare per bene che tale sostituzione esiste).

Per esempio i rami di centro il punto e_0 sono equivalenti (a meno di permutazioni delle coordinate) a rami parametrizzati nel modo seguente: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ X^m \\ P_1(X) \\ \vdots \\ P_n(X) \end{pmatrix}$ ove $\mathrm{ord}_X P_i(X) \geqslant m$.

1.1.5. Primitività dei rami. Un ramo $P(X)$ si dice primitivo o irriducibile se non può essere scritto come $Q(X^r)$ per qualche altro ramo $Q(X)$. Chiaramente si tratta di una nozione stabile per cambiamenti di coordinate proiettive e per equivalenza tra rami.

Nella forma speciale, si vede subito che un ramo è primitivo se e solo se l'insieme degli esponenti con cui il parametro X compare nelle coordinate $P_i(X)$ è primo, ovvero non ammette divisori comuni diversi da 1.

Un ramo $P(X)$ si dice imprimitivo o non primitivo o riducibile se non è primitivo. In tal caso l'intero r per cui si scrive come $P(X) = Q(X^r)$ con $Q(X)$ primitivo (dunque r massimo) si dice ramificazione di $P(X)$, ed esistono esattamente r di tali rami $Q(X)$.