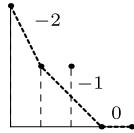


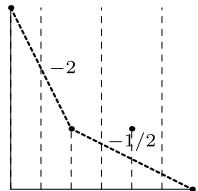
ha quattro radici distinte, due di ordine 1 (che cominciano con  $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} X + \dots$ ) e due di ordine nullo (che cominciano con  $\pm 1 + \frac{3}{2} X + \dots$ ) dunque quattro fattori in  $K[[X]][Y]$ .

$$(6) Y^4 - Y^3 + 5X^2Y^2 + 3X^2Y + X^4 \text{ (trifoglio)}$$



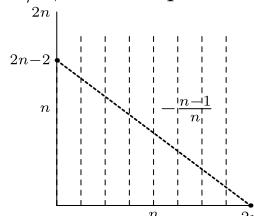
ha una radice d'ordine 2, due radici d'ordine 1 e una radice d'ordine 0 (quattro fattori in  $K[[X]][Y]$ ).

$$(7) Y^6 + 3X^2Y^4 + (3X^4 - 4X^2)Y^2 + X^6 \text{ (quadrifoglio)}$$



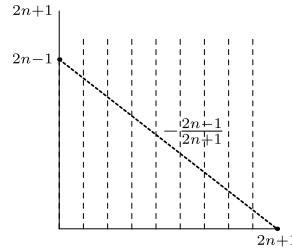
ha due radici d'ordine 2 e quattro d'ordine 1/2; vi sono quattro fattori irriducibili in  $K[[X]][Y]$ .

$$(8) Y^{2n} - X^{2n} - X^{2n-2} \text{ (iperellittiche pari)}$$



ha  $2n$  radici distinte tutte di ordine  $(n-1)/n$ , e in  $K[[X]][Y]$  vi sono due fattori irriducibili; le radici sono  $y_\zeta = \zeta X^{\frac{n-1}{n}} (1+X^2)^{\frac{1}{2n}} = \zeta X^{\frac{n-1}{n}} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2n}{i} X^{2i}$  ove  $\zeta$  varia sulle radici  $2n$ -esime dell'unità. I due fattori sono  $\prod_{\zeta^n=1} (Y - y_\zeta)$  che tiene conto delle radici  $n$ -esime di 1 e  $\prod_{\zeta^n=-1} (Y - y_\zeta)$  che tiene conto delle altre (radici  $n$ -esime di -1).

$$(9) Y^{2n+1} - X^{2n+1} - X^{2n-1} \text{ (iperellittiche dispari)}$$



ha  $2n+1$  radici distinte tutte di ordine  $(2n-1)/(2n+1)$ , e in  $K[[X]][Y]$  è irriducibile; le radici sono  $y_\zeta = \zeta X^{\frac{2n-1}{2n+1}} (1+X^2)^{\frac{1}{2n+1}} = \zeta X^{\frac{2n-1}{2n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/(2n+1)}{i} X^{2i}$  ove  $\zeta$  varia sulle radici  $(2n+1)$ -esime dell'unità.

(10) studiare il punto singolare delle parabole generalizzate.

**0.9.5. PROBLEMA.** Che cosa può invece succedere se l'equazione per  $c_1$  presenta radici multiple?

Come mai questa ipotesi semplifica molto la situazione? Il problema fondamentale è che non è possibile essere sicuri di quanto ramifichi la variabile (cioè del denominatore necessario all'esponente) finché non si vedono tante soluzioni distinte quanto richiede quel lato del poligono...

#### 0.9.6. ESEMPI DI RAMIFICAZIONE TARDIVA.

- (0) Si considerino i casi di  $f(X, Y) = (Y - X)^2 - X^3$  (con soluzioni  $Y = X \pm X^{3/2}$ ) e  $f(X, Y) = (Y - X)^2 - X^4$  (con soluzioni  $Y = X \pm X^2$ ); guardare i poligoni di Newton.
- (1) Consideriamo il caso  $f(X, Y) = (Y - X^2)^2 - Y^3$ . Il poligono di Newton (rispetto a  $Y$ ) ha un lato di pendenza -2, lunghezza 2, e radice doppia  $c_1 = 1$ . Costruendo il poligono secondario (quello di  $f(X, X^2(1+Y_1))$  rispetto a  $Y_1$ ) si trova un lato di pendenza negativa -1, lunghezza 2 e radici  $c_2 = \pm 1$ . Quindi le due soluzioni cominciano con  $X^2 \pm X^3 + \dots$  (niente ramificazione, due fattori formali).
- (2) Consideriamo il caso  $f(X, Y) = (Y - X^2)^2 - XY^3$ . Il poligono di Newton (rispetto a  $Y$ ) ha un lato di pendenza -2, lunghezza 2, e radice doppia  $c_1 = 1$ . Costruendo il poligono secondario (quello di  $f(X, X^2(1+Y_1))$  rispetto a  $Y_1$ ) si trova un lato di pendenza negativa  $-3/2$ , lunghezza 2 e radici  $c_2 = \pm 1$ . Quindi le due soluzioni cominciano con  $X^2 \pm X^{7/2} + \dots$  (soluzioni in  $K[[X^{1/2}]]$ , un solo fattore formale).