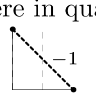
Dimostrazione. L'unica cosa che resta da verificare è che i fattori $\prod_{i=1}^{s}(Y-y_i(X))$ sono in effetti in $K(\!(X)\!)[Y]$. Per questo osserviamo che un elemento $\varphi(X^{1/s}) \in K(\!(X^{1/s})\!)$ appartiene a $K(\!(X)\!)$ se e solo se $\varphi(X^{1/s})=\varphi(\zeta X^{1/s})$ per ogni ζ radice s-esima (eventualmente primitiva) dell'unità. Quindi, dato un elemento $y(X^{1/s}) \in K(\!(X^{1/s})\!)$, allora il prodotto $\prod_\zeta y(\zeta X^{1/s})$ appartiene a $K(\!(X)\!)$. Si osservi poi che siccome il polinomio di partenza aveva coefficienti in $K(\!(X)\!)$, se possiede una radice $y(X^{1/s}) \in K(\!(X^{1/s})\!)$ allora possiede anche tutte le radici coniugate $y(\zeta X^{1/s})$ (ove ζ varia sulle radici s-esime dell'unità). In effetti si tratta di osservazioni elementari della teoria di Galois. □

0.9.3. Osservazione sulla ricerca di radici per polinomi in $K[\![X]\!][Y]$. Per capire a fondo la situazione, bisognerebbe saper rispondere alle due domande seguenti. Come si determina il denominatore comune degli esponenti di una soluzione (cioè per quale s minimo la soluzione appartiene a $K(\!(X^{1/s})\!)$)? E come si determina quanti fattori irriducibili in $K(\!(X)\!)[Y]$ comporta una pendenza unica del poligono? Nel caso di polinomi in $K[\![X]\!][Y]$, si può rispondere in modo abbastanza semplice.

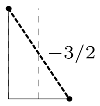
Se poniamo $s_1=r/s$ e supponiamo che l'equazione polinomiale per c_1 non abbia radici multiple, allora la soluzione cercata è in $K(\!(X^{1/s})\!)$. Infatti si può applicare il lemma di Hensel al polinomio che si ottiene sostituendo $X=U^s$ e $Y=U^rV$, ottenendo che la soluzione che ha c_1 come primo termine è a coefficienti in $K[\![U]\!]$. Questa risposta è sufficiente, perché il caso di radici multiple può essere riconosciuto tramite il discriminante $R_Y(f, D_Yf)$ per poi eventualmente trovare il fattore comune di f e D_Yf.

Se poi abbiamo un lato di lunghezza nq e di altezza mq con m,n,q interi e m,n coprimi (dunque pendenza $-m/n$), allora vi sono nq soluzioni in $K(\!(X^{1/n})\!)$. Scelta una di queste, sia $y(X^{1/n})$, vi sono le sue coniugate $y(\zeta X^{1/n})$ ove ζ varia sulle radici n-esime dell'unità, che insieme danno luogo ad un fattore formale irriducibile (formale perché stabile per coniugio con le radici n-esime dell'unità, irriducibile perché nessun divisore proprio ha la stessa stabilità). Dunque in tale situazione vi sono esattamente q fattori irriducibili (volendo essere più formali: possiamo definire una relazione di equivalenza tra le nq radici dicendo che due radici $y(X^{1/n})$ e $y'(X^{1/n})$ sono equivalenti se $y'(X^{1/n})=y(\zeta X^{1/n})$ con $\zeta^n=1$; abbiamo allora q classi di equivalenza formate da n elementi ciascuna, e ogni classe di equivalenza dà luogo ad un fattore formale).

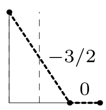
0.9.4. Esempi. Analizziamo i casi dei poligoni di Newton di alcune curve già incontrate; consigliamo al lettore di procedere in qualcuno dei passi per trovare le soluzioni di Puiseux.

(1) $Y^2-X^3-X^2$ (nodo) 

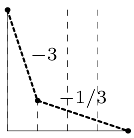
ha due radici distinte in $K[\![X]\!]$ d'ordine 1 che sono $y_\pm=\pm X(X+1)^{1/2}=\pm X\sum_{i=0}^{\infty}\binom{1/2}{i}X^i$ e lo fattorizzano in $K[\![X]\!][Y]$ come $(Y-y_+)(Y-y_-)$.

(2) Y^2-X^3 (cuspide) 

ha due radici distinte in $K[\![X^{1/2}]\!]$ d'ordine 3/2 che sono $y_\pm=\pm X^{3/2}$. Pertanto è irriducibile in $K[\![X]\!][Y]$.

(3) $Y^3-Y^2+X^3$ (altra cuspide) 

ha tre radici distinte, una di ordine nullo (che comincia con $1-X^3-2X^6+\cdots$), e due di ordine 3/2 (una comincia con $X^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}X^3+\frac{5}{8}X^{\frac{9}{2}}+\cdots$ l'altra l'opposta); queste due formano un fattore irriducibile in $K[\![X]\!][Y]$ (quindi due fattori irriducibili in $K[\![X]\!][Y]$).

(4) Y^4-XY+X^4 (bifoglio) 

ha quattro radici, una di ordine 3 (che comincia con $X^3+X^{11}+\cdots$) e le altre tre di ordine 1/3 (una comincia con $X^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}X^3+\cdots$ e le altre ne sono le coniugate), che insieme danno luogo a un fattore irriducibile in $K[\![X]\!][Y]$ (quindi due fattori irriducibili in $K[\![X]\!][Y]$).

(5) $Y^4-Y^2-3XY+X^4-X^2$ (altro bifoglio)