distinti $0 \leqslant j \neq k \leqslant d$ tali che

$$r_j + js_1 = r_k + ks_1 (= s') \qquad \text{cioè} \qquad r_j - r_k = s_1(k-j) \ , \qquad \text{dunque} \qquad s_1 = -\frac{r_k - r_j}{k-j}$$

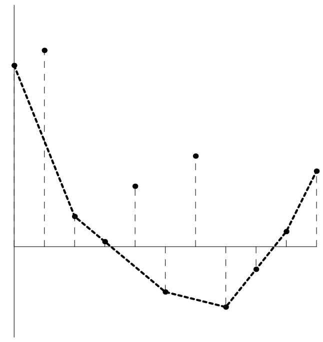
e inoltre

$$\sum_{i \text{ t.c. } r_i + is_1 = s'} \alpha_i c^i = 0 \ .$$

La prima condizione identifica i possibili s_1 come le pendenze di certe rette nel piano cartesiano, e la seconda condizione determina i possibili c_1 (non nulli) come zeri di una equazione di grado $i_{\max} - i_{\min}$ ove i pedici indicano il minimo e il massimo indice i per cui si realizza la condizione della sommatoria.

Conviene quindi introdurre quest'oggetto: *si dice poligono di Newton di* $f(X,Y) = \sum_{i=0}^{d} a_i(X)Y^i \in K(((X)))[Y]$ *il poligono che si ottiene facendo l'inviluppo convesso dei punti del piano dati dalle semirette verticali sopra i punti* $(i, \mathrm{ord}_X a_i(X))$ *per* $i = 1, \dots, d$*; in effetti ci interesseremo solo ai lati inferiori della figura, che si possono ottenere come sequenze di segmenti che uniscono due o più dei punti dati, e lasciano gli altri al di sopra. Chiameremo pendenza di un lato il suo coefficiente angolare usuale, e lunghezza del lato la lunghezza della proiezione sull'ascissa. Si osservi che ogni lato ha estremi ad ascisse intere e ordinate razionali, e dunque le pendenze sono tutte razionali e le lunghezze tutte intere; la somma delle lunghezze è* d*.*

Un poligono di Newton ha una forma di questo tipo, in generale: per un polinomio $\sum_{i=0}^{10} a_i(X)Y^i$ in $K(((X)))[Y]$ con $\mathrm{ord}_X a_i(X) = 6$, $13/2$, 1, $1/6$, 2, $-3/2$, 3, -2, $-3/4$, $1/2$, $5/2$ rispettivamente per $i = 0, 1, \dots, 10$. (dico questo, perché quelli che vedremo poi saranno piuttosto semplici).



Riprendendo il discorso: gli esponenti s_1 cercati sono esattamente gli opposti delle pendenze del poligono, e le equazioni che determinano i coefficienti c_1 sono indiciate sui punti che effettivamente cadono su un lato del poligono.

Ora potremo iterare il procedimento, sostituendo $Y = X^{s_1}(c_1 + Y_1)$, ponendo $f_1(X,Y) = f(X, X^{s_1}(c_1 + Y_1))$ e rifare a f_1 e Y_1 ciò che abbiamo fatto a f e Y, solo che cercheremo esponenti $s_2 > s_1$, ovvero pendenze $-s_2'$ del poligono di Newton di f_1 minori di 0. Conoscendo già il teorema di Newton-Puiseux, sappiamo che questo procedimento darà le radici cercate; se volessimo invece dimostrare quel teorema usando questo procedimento costruttivo dovremmo dimostrare che

(a) il procedimento non si blocca a qualche passo finito, a meno che non dia una soluzione polinomiale: cioè al passo n-esimo il poligono di Newton di f_i deve avere un lato di pendenza negativa;

(b) la sequenza degli esponenti razionali s_i ammette un denominatore comune limitato.

La dimostrazione di questi fatti si può trovare nel libro di R.J.Walker.

0.9.1. CASO DI UNICA PENDENZA. *Un polinomio* $f(X,Y) \in K(((X)))[Y]$ *ha un poligono di Newton di pendenza unica* $-q$ *se e solo se tutte le sue radici hanno lo stesso ordine* q*.*

Infatti una implicazione viene dalle considerazioni fatte. Viceversa, possiamo supporre che il polinomio sia monico; se tutte le radici $y_i(X)$ hanno ordine q, allora il coefficiente $a_j(X)$ di Y^j in $\prod_i (Y - y_i(X))$ è un polinomio simmetrico di grado $d-j$ nelle $y_i(X)$, e dunque il suo ordine è maggiore o uguale a $(d-j)q$, e dunque il punto $(j, \mathrm{ord}_X a_j(X))$ sta sopra il punto $(j, (d-j)q)$ che a sua volta appartiene alla retta congiungente $(0, \mathrm{ord}_X a_0(X)) = (0, dq)$ con $(d, \mathrm{ord}_X a_d(X)) = (d, 0)$, la quale è quindi l'unica retta (giustamente di pendenza $-q$) del poligono di Newton.

0.9.2. TEOREMA (NEWTON). *Sia* $f(X,Y) = \sum_{i=0}^{d} a_i(X)Y^i \in K((X))[Y]$*. Per ogni lato di pendenza* $-q$ *e di lunghezza* s *del suo poligono di Newton vi sono esattamente* s *radici* $y_1(X), \dots, y_s(X)$ *del polinomio in* $K(((X)))$*, non necessariamente distinte, tutte di ordine* q*.*

Inoltre, il prodotto $\prod_{i=1}^{s} (Y - y_i(X))$ *è elemento di* $K((X))[Y]$*, con poligono di Newton di unica pendenza* $-q$*, che divide* $f(X,Y)$ *(in* $K((X))[Y]$*, ma si faccia attenzione al fatto che non è necessariamente irriducibile).*