In particolare $K[\![X]\!]$ non è a ideali principali, anche se si tratta di un anello a fattorizzazione unica (perché?).

0.8.4. CORPO DEI QUOZIENTI. Si osservi che, evidentemente, $K[\![X]\!]$ è integro, e quindi ammette un corpo dei quozienti che indicheremo con $K(\!(\!(X)\!)\!)$ e che chiaramente si descrive come unione dei corpi quozienti di serie formali:

$$K(\!(\!(X)\!)\!) = \bigcup_{0\neq s\in\mathbb{N}} K(\!(X^{\frac{1}{s}})\!) = \bigcup_{0\neq s\in\mathbb{N}} \bigcup_{t\in\mathbb{N}} X^{-\frac{t}{s}} K[\![X^{\frac{1}{s}}]\!] .$$

0.8.5. È usuale dire che le "variabili" $X^{\frac{1}{s}}$ sono ottenute per "ramificazione da X", ovvero sono ottenute "risolvendo l'equazione $Y^s = X$".

0.8.6. Si faccia attenzione al fatto che non ogni espressione del tipo $\sum_i a_i X^{q_i}$ con ($a_i \in K$ e) $q_i \in \mathbb{Q}$ appartiene a $K[\![X]\!]$ o $K(\!(\!(X)\!)\!)$; oltre alle condizioni sulla finitezza della eventuale coda di Laurent, bisogna anche che gli esponenti razionali q_i abbiamo un denominatore comune (finito).

0.8.7. TEOREMA (NEWTON-PUISEUX). *Se K è algebricamente chiuso di caratteristica zero, allora il corpo $K(\!(\!(X)\!)\!)$ è algebricamente chiuso.*

Di conseguenza abbiamo che:

(1) se $f(X,Y) \in K[X,Y]$ di grado $d = \deg_Y f = \deg f$ allora $f(X,Y) = \prod_{i=1}^{d}(Y - f_i(X))$ con $f_i(X) \in K(\!(\!(X)\!)\!)$;

(2) se inoltre $f(X,Y) \in K[X,Y]$ era polinomio irriducibile, allora non ha radici multiple in $K(\!(\!(X)\!)\!)$, né fattori irriducibili multipli come elemento di $K(\!(X)\!)[Y]$; infatti in tal caso avrebbe discriminante nullo e quindi radici multiple in $K(X)$ (impossibile se è irriducibile...).

DIMOSTRAZIONE. Proponiamo una dimostrazione per induzione, non costruttiva, di un risultato più preciso: se $f(X,Y) \in K(\!(\!(X)\!)\!)[Y]$ è polinomio di grado coprimo con la caratteristica del corpo K (dunque sempre se K ha caratteristica nulla) algebricamente chiuso allora esso ammette uno zero in $K(\!(\!(X)\!)\!)$. La dimostrazione usa il lemma di fattorizzazione di Hensel.

Infatti iniziamo col notare che possiamo supporre $f(X,Y) \in K[\![X]\!][Y]$ monico ($a_0(X) = 1$) di grado d, con coefficiente nullo del termine Y^{d-1} e $\min\{\mathrm{ord}_X a_2(X), \ldots, \mathrm{ord}_X a_d(X)\} = 0$. Questo perché:

(a) con l'usuale sostituzione (di Y con $Y - a_1(X)/d$) si può far sparire il coefficiente $a_1(X)$ di Y^{d-1};

(b) sostituendo l'incognita Y con $X^\alpha Y$, ed eliminando $X^{d\alpha}$, i coefficienti $a_i(X)$ sono cambiati in $X^{-i\alpha}a_i(X)$, e si può scegliere $\alpha \in \mathbb{Q}$ in modo che gli ordini risultino positivi, e il minimo nullo;

(c) sostituendo X con X^e per $e \in \mathbb{N}$ denominatore comune degli esponenti frazionari si può supporre $a_i(X) \in K[\![X]\!]$.

Tutte queste trasformazioni permettono, trovata una radice, di ottenere una radice per il polinomio di partenza (per l'ultima, si noti che $K(\!(\!(X)\!)\!) = K(\!(\!(X^e)\!)\!)$).

Sia allora $f(X,Y) \in K[\![X]\!][Y]$ come detto, e osserviamo che $f(0,Y) \in K[Y]$ non è Y^d e deve avere almeno due radici distinte (altrimenti sarebbe del tipo $(Y-c)^d$ con d primo con p, e il termine in Y^{d-1} sarebbe non nullo). Dunque si fattorizza come prodotto di due fattori coprimi non banali, cioè di grado strettamente minore, e uno dei due deve avere grado non divisibile per p. Dunque usando il lemma di fattorizzazione di Hensel si può procedere per induzione su d, essendo ovvio per $d = 1$; nel passo induttivo (almeno) uno dei due fattori propri ha una radice (per ipotesi induttiva). □

0.8.8. Si consideri $Y^p - Y - X^{-1}$ su un corpo di caratteristica p quale esempio di polinomio privo di radici in $K(\!(\!(X)\!)\!)$.

0.9. POLIGONO DI NEWTON. Se vogliamo determinare in effetti le radici d'un polinomio a coefficienti in $K(\!(X)\!)$ conviene introdurre come strumento il poligono di Newton del polinomio. Motiviamone l'uso ragionando sulle condizioni necessarie affinché una serie di Puisuex

$$y(X) = c_1X^{s_1} + c_2X^{s_2} + c_3X^{s_3} + \cdots \quad \in K(\!(\!(X)\!)\!)$$

con $s_i \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$ e $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$ sia zero di un polinomio

$$f(X,Y) = a_0(X) + a_1(X)Y + a_2(X)Y^2 + \cdots + a_d(X)Y^d \quad \in K(\!(\!(X)\!)\!)[Y]$$

ove $\mathrm{ord}_X a_i(X) = r_i$ e $a_i(X) = \alpha_i X^{r_i} + \cdots \in K(\!(\!(X)\!)\!)$. Affinché ciò succeda è necessario che il termine d'ordine minimo in $f(X, y(X))$ si annulli, e per questo è necessario che esistano almeno due indici