Vediamo, per capire il procedimento, il passo successivo: cerchiamo a_1 tale che $f(X, a_0 + a_1X) \equiv 0 \pmod{X^2}$. Poiché

$$\begin{aligned} f(X, a_0 + a_1X) &\equiv f(X, a_0) + D_Y f(X, a_0)a_1X \pmod{X^2} \\ &\equiv D_X f(0, a_0)X + D_Y f(X, a_0)a_1X \pmod{X^2} \end{aligned}$$

vogliamo che $D_X f(0, a_0) + D_Y f(X, a_0)a_1 \equiv 0 \pmod{X}$, e dunque troviamo necessariamente che dev'essere $a_1 = -D_X f(0, a_0)/D_Y f(0, a_0)$ (si noti che il denominatore è non nullo per ipotesi).

Vediamo ora il passo induttivo; supponiamo quindi di avere $y_n(X) = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ con la proprietà che $f(X, y_n(X)) \equiv 0 \pmod{X^{n+1}}$ e cerchiamo a_{n+1} tale che per $y_{n+1}(X) = \sum_{i=0}^{n+1} a_iX^i$ si abbia $f(X, y_{n+1}(X)) \equiv 0 \pmod{X^{n+2}}$. Siccome

$$\begin{aligned} f(X, y_{n+1}(X)) &\equiv f(X, y_n(X)) + D_Y f(X, y_n(X))a_{n+1}X^{n+1} \pmod{X^{n+2}} \\ &\equiv D_X^{n+1} f(0, y_n(0))X^{n+1} + D_Y f(X, y_n(X))a_{n+1}X^{n+1} \pmod{X^{n+2}} \end{aligned}$$

vogliamo che $D_X^{n+1} f(0, a_0) + D_Y f(X, y_n(X))a_{n+1} \equiv 0 \pmod{X}$, e dunque troviamo necessariamente $a_{n+1} = -D_X^{n+1} f(0, a_0)/D_Y f(0, a_0)$ (si noti che il denominatore è sempre lo stesso, non nullo per ipotesi). □

0.6.1. Radici di serie formali. In particolare si osservi che ogni serie formale $f(X)$ di ordine zero su un corpo algebricamente chiuso ammette n radici n-esime distinte per ogni n primo con la caratteristica del corpo (ogni n in caratteristica nulla); infatti si tratta di cercare gli zeri del polinomio $f(X, Y) = Y^n - f(X)$, e $f(0, Y) = Y^n - f(0)$ ammette n zeri distinti in K se $f(0) \neq 0$.

0.7. Teorema (Lemma di Hensel di rialzamento delle fattorizzazioni). *Sia $f(X, Y) \in K[\![X]\!][Y]$ (polinomio in Y a coefficienti in $K[\![X]\!]$) monico, e supponiamo che $f(0, Y)$ si fattorizzi in fattori primi tra loro $g_1(Y)g_2(Y)$ in $K[Y]$. Allora $f(X, Y)$ si fattorizza come $g_1(X, Y)g_2(X, Y)$ in $K[\![X]\!][Y]$, di gradi nella Y rispettivamente quelli di $g_1(Y)$ e $g_2(Y)$, con $g_1(0, Y) = g_1(Y)$ e $g_2(0, Y) = g_2(Y)$.*

Dimostrazione. Si osservi che il polinomio $f(X, Y) \in K[\![X]\!][Y]$ si scrive come serie in X a coefficienti nei polinomi in Y come

$$f(X, Y) = f_0(Y) + f_1(Y)X + f_2(Y)X^2 + \cdots + f_i(Y)X^i + \cdots$$

ove $f_i(Y) = D_X^i f(0, Y)/i!$ sono polinomi in Y di grado minore del grado di f (in Y). Esprimendo allo stesso modo le due serie cercate $g_1(X, Y)$ e $g_2(X, Y)$, si tratta di determinare ricorsivamente i polinomi $g_{1,i}(Y)$ e $g_{2,i}(Y)$ con gradi minori di quelli di $g_1(Y)$ e $g_2(Y)$ rispettivamente. Questo può essere fatto perché per ipotesi possiamo usare $g_{1,0}(Y) = g_1(Y)$ e $g_{2,0}(Y) = g_2(Y)$, che sono primi tra loro e per questo permettono il passo induttivo. □

0.7.1. Che relazioni vi sono tra i due lemmi di Hensel?

0.8. Definizione (Serie di Puiseux). *Introduciamo i simboli $X^{\frac{r}{s}}$ con $r, s \in \mathbb{N}$, $s \neq 0$, soggetti alle relazioni $X^{\frac{1}{1}} = X$, $(X^{\frac{1}{s}})^r = X^{\frac{r}{s}}$ e $X^{\frac{r}{rs}} = X^{\frac{1}{s}}$; da queste relazioni segue che $X^{\frac{rn}{sn}} = X^{\frac{r}{s}}$. Definiamo allora l'anello delle serie di Puiseux, o anello delle serie ad esponenti frazionari come*

$$K[\![X]\!] = \bigcup_{0 \neq s \in \mathbb{N}} K[\![X^{\frac{1}{s}}]\!]$$

con le operazioni di somma e prodotto unicamente definite dal fatto di restringersi alle operazioni usuali in ciascun anello $K[\![X^{\frac{1}{s}}]\!]$ (ogni coppia di elementi di $K[\![X]\!]$ appartiene a qualche $K[\![X^{\frac{1}{s}}]\!]$ e ivi possono essere sommati e moltiplicati).

0.8.1. La notazione per le serie di Puiseux non è standard, e credo non vi sia una notazione universalmente riconosciuta; altre notazioni sensate possono essere $K[\![\sqrt[*]{X}]\!]$ oppure $K[\![X^{1/*}]\!]$ oppure $K[\![X^*]\!]$ mentre eviterei del tutto l'abusata $K[\![X]\!]^*$ che si presta a varie confusioni!

0.8.2. Ordini. Possiamo estendere agli elementi di $K[\![X]\!]$ la nozione di ordine di una serie, ottenendo questa volta una applicazione $\mathrm{ord}_X : K[\![X]\!] \to \mathbb{Q}$ con proprietà analoghe a quelle viste per $K[\![X]\!]$.

0.8.3. La struttura d'anello di $K[\![X]\!]$ è notevolmente più complicata di quella di $K[\![X]\!]$; infatti anche $K[\![X]\!]$ ha un unico ideale massimale, ma esso non è nemmeno finitamente generato.