(4) ogni circonferenza è unione di dischi aperti; dunque ogni disco chiuso è aperto, e lo spazio è totalmente sconnesso.

0.3.2. È da notare ancora l'intima relazione con l'algebra della topologia introdotta. Una base per gli intorni di 0 è data dagli ideali generati da X^n (al variare di n in $\mathbb{N}$) che sono esattamente i dischi aperti centrati in 0 e di raggio p^{-n}. Inoltre, poiché la distanza è invariante per traslazioni (addittive, come per tutte le metriche definite da norme), anche la topologia è invariante per traslazioni, e quindi determinata dal filtro degli intorni di zero. Siccome questo è generato dagli ideali potenza di X, la topologia viene detta spesso X-adica (come pure l'ordine e la norma che la definiscono).

Si osservi che sul sottoanello $K[X]$ dei polinomi la norma introdotta dà una struttura di spazio normato in cui un polinomio è "tanto più piccolo" per quella norma quanto più grande la potenza minima con cui compare la variabile (quindi anche il grado del polinomio è grande, ma questo non influisce sulla norma). Per esempio il disco centrato in 0 e di raggio $1/p^n$ è formato dall'ideale principale generato da X^n in $K[X]$.

0.4. Teorema (Completezza). *Con le nozioni introdotte, $K[\![X]\!]$ risulta spazio (ultra)metrico completo, e si identifica con il completamento di $K[X]$ con la struttura indotta di spazio normato (in particolare $K[X]$ è denso in $K[\![X]\!]$).*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che ogni successione di Cauchy in $K[\![X]\!]$ converge, e che ogni elemento di $K[\![X]\!]$ è limite di una successione a valori in $K[X]$. Questo segue subito dalla definizione di successione di Cauchy: f_i ($i \in \mathbb{N}$) è di Cauchy in $K[\![X]\!]$ se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $|f_i - f_j| \leqslant p^{-n}$ per ogni $i, j \geqslant m$. La condizione equivale a $\operatorname{ord}_X(f_i - f_j) \geqslant n$, e questo significa che $f_i \equiv f_j \pmod{X^n}$. Quindi per ogni n, da un certo punto in poi della sequenza gli elementi hanno tutti "lo stesso inizio fino a X^n". Allora basta definire la serie f che ha come coefficiente di X^i quello che diventa stabile in tutti gli elementi della successione da un certo indice in poi; f è di conseguenza il limite della successione.

D'altra parte è chiaro che ogni serie $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$ è limite della successione dei polinomi $f_j = \sum_{i=1}^{j} a_i X^i$ ottenuti troncando la serie modulo potenze successive di X. □

0.4.1. Completamento come limite proiettivo. Il completamento di uno spazio (vettoriale) normato è definito in Analisi come quoziente dello spazio delle successioni di Cauchy modulo il sottospazio delle successioni convergenti a zero. Nel nostro caso, possiamo dare una costruzione algebrica del completamento, mediante la nozione di "limite proiettivo".

Data una famiglia A_i ($i \in \mathbb{N}$) di insiemi e una famiglia di mappe $\alpha_i : A_{i+1} \to A_i$ (dette di transizione), il limite proiettivo $\varprojlim_i A_i$ è per definizione il sottinsieme del prodotto cartesiano $\prod_i A_i$ formato dagli elementi $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tali che $\alpha_i(a_{i+1}) = a_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ (si tratta delle sequenze coerenti con le mappe di transizione date).

L'insieme $\varprojlim_i A_i$ possiede una famiglia di mappe (dette di proiezione) $\pi_j : \varprojlim_i A_i \to A_j$, compatibili con le mappe di transizione, e che godono di una proprietà universale. Se gli insiemi A_i sono dotati di topologie per cui le mappe di tansizione siano continue, allora su $\varprojlim_i A_i$ si pone la minima topologia che rende continue tutte le proiezioni (è la topologia indotta da quella prodotto di $\prod_i A_i$). Se gli insiemi A_i sono dotati di strutture algebriche per le quali le mappe di transizione siano omomorfismi, allora su $\varprojlim_i A_i$ è indotta una analoga struttura (da quella di $\prod_i A_i$).

Tornando al nostro caso, poniamo $A_i = K[X]/(X^{i+1})$ e usiamo le mappe canoniche di riduzione $\alpha_i : K[X]/(X^{i+2}) \to K[X]/(X^{i+1})$, allora si ha $K[\![X]\!] \cong \varprojlim_i K[X]/(X^{i+1})$, come si verifica subito, e l'isomorfismo identifica tra loro le strutture naturali di anello definite nei due lati. Inoltre la topologia X-adica è la topologia indotta dalle topologie discrete su ciascuno dei quozienti.

0.5. Sostituzioni nelle serie. In generale non ha senso calcolare una serie formale $f(X)$ dando alla "variabile X" un valore appartenente al corpo K; anche quando il corpo sia normato, questo eventualmente dà luogo al problema di "convergenza" della serie. Comunque si può sempre valutare una serie formale per $X = 0$, e il risultato è il suo termine noto $f(0) = a_0$; si noti però che anche questa operazione non ha senso nell'ambiente delle serie di Laurent.

Una operazione che invece è sempre possibile fare, e sarà di notevole importanza nel seguito, è sostituire alla X una serie formale di ordine strettamente positivo. Infatti se $f(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$ e