$g(X)=\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i$ per $f(X)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ è dato da

$$\begin{cases} a_0b_0 = 1 \\ a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \\ \cdots \\ a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0 = 0 \\ \cdots \end{cases}$$

e si vede immediatamente che esso ammette una unica soluzione ricorsiva se e solo se a_0 è elemento invertibile di K.

Per esempio è ben noto che l'inverso di $1\pm X$ è $\sum_{i=0}^{\infty}(\pm X)^i$ (serie geometrica), e che l'inverso di $\exp(X)=\sum_{i=0}^{\infty} X^i/i!$ è $\exp(-X)=\sum_{i=0}^{\infty}(-X)^i/i!$ (serie esponenziali).

0.2.4. Dall'osservazione precedente segue subito che gli unici ideali propri di $K[\![X]\!]$ sono quelli generati da potenze di X, e che l'unico ideale massimale è quello generato da X. In particolare $K[\![X]\!]$ è anello ad ideali principali e dunque a fattorizzazione unica.

L'anello $K[\![X]\!]$ è euclideo?

0.2.5. Si osservi che l'anello delle serie formali è molto più semplice dell'anello dei polinomi che esso contiene, almeno per quanto riguarda le nozioni di elemento invertibile e di divisibilità; infatti risulta che, date due serie formali $f(X)$ e $g(X)$, allora $f(X)$ divide $g(X)$ se e solo se $\mathrm{ord}_X f(X) \leqslant \mathrm{ord}_X g(X)$.

0.2.6. In particolare la descrizione del corpo quoziente $K(\!(X)\!)$ è particolarmente facile: ogni quoziente del tipo $f(X)/g(X)$ con $f(X), g(X) \in K[\![X]\!]$ si scrive $X^t h(X)$ con $t \in \mathbb{Z}$ e $\mathrm{ord}_X h(X) = 0$. Tale elemento appartiene a $K[\![X]\!]$ se e solo se $t \in \mathbb{N}$.

Dunque gli elementi di $K(\!(X)\!)$ sono dati da scritture del tipo $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i$ ove solo un numero finito di termini negativi è consentito (descrizione esplicita delle serie di Laurent; spesso la parte negativa della serie viene chiamata coda di Laurent). Quindi abbiamo che

$$K(\!(X)\!) = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} X^{-t} K[\![X]\!]$$

(unione crescente di insiemi). Si noti anche che $K(\!(X)\!) = K[\![X]\!][1/X]$.

0.3. Definizione-Teorema (Ultra-norma). *Fissato un intero $p>1$, definiamo per ogni serie formale $f(X) \in K[\![X]\!]$ la norma $|f(X)| = p^{-\mathrm{ord}_X f(X)}$. Otteniamo allora una applicazione norma: $K[\![X]\!] \to \mathbb{R}$, verificante le seguenti proprietà:*
(1) nullità: $|f| \geqslant 0$ e $|f| = 0$ se e solo se $f = 0$.
(2) moltiplicatività: $|fg| = |f|\,|g|$.
(3) ultra-subaddittività: $|f+g| \leqslant \max(|f|, |g|)$ (e vale l'uguaglianza se $|f| \neq |g|$).
In particolare si tratta di una norma (spesso detta ultranorma per la forma forte della proprietà (3)), poiché $|f+g| \leqslant \max(|f|,|g|) \leqslant |f| + |g|$ (per la positività).

0.3.1. La definizione precedente dà a $K[\![X]\!]$ una struttura di spazio metrico, tramite l'usuale definizione $d(f,g) = |f-g|$, spesso detto ultrametrico, poiché la disuguaglianza triangolare si manifesta in una forma forte: $d(f,g) \leqslant \max\{d(f,h), d(h,g)\}$ (e vale l'uguaglianza se i due termini nel max sono diversi).

Possiamo quindi utilizzare in $K[\![X]\!]$ le usuali nozioni note per uno spazio metrico: topologia indotta, dischi di centro un elemento e raggio positivo, successioni convergenti e di Cauchy, completezza (ogni successione di Cauchy converge), compattezza (ogni successione ammette sottosuccessioni convergenti), ecc.

Tuttavia si faccia attenzione a questo: la forma forte della disuguaglianza triangolare rende la (ultra-)metrica introdotta molto lontana dalla nostra intuizione di "misura di distanza". Per esercizio, e per rendersi conto della situazione, il lettore dovrebbe verificare quanto segue: in ogni spazio vettoriale dotato di una ultra-norma, e con l'usuale nozione di distanza associata,
(1) ogni triangolo è isoscele;
(2) ogni punto di un disco è centro per il disco;
(3) due dischi sono disgiunti oppure uno contenuto nell'altro;