Dimostrazione. Accenniamo solo all'argomento classico: si fa per induzione discendente sul grado della curva $\mathscr{H}$. Tramite una sequenza di trasformazioni quadratiche standard, possiamo supporre che tutti i punti comuni siano "effettivi" (cioè non di intorni successivi di qualche altro punto). Per gradi alti di $\mathscr{H}$ le condizioni di molteplicità dei punti chieste dal teorema sono indipendenti tra loro, e si può calcolare la dimensione dello spazio lineare corrispondente di curve. D'altra parte la condizione per h di essere combinazione di f e g dà luogo ad altro sistema lineare, chiaramente contenuto nel precedente, e che si verifica avere la stessa dimensione. Dunque coincidono.

Per scendere di grado si ragiona per assurdo, moltiplicando l'eventuale eccezione di grado massimo per qualche retta ben scelta. □

-1.7.1. Si noti la simmetria dell'enunciato rispetto alle due curve, che nella versione semplice del teorema non avevamo (e non ci sarà nemmeno nella versione moderna).

-1.7.2. Come si può dedurre il teorema semplice del capitolo precedente dalla versione classica del teorema di Noether?

0. Serie formali e serie di Puiseux.

0.1. Definizione (Serie formali). *Definiamo l'anello delle serie formali in una indeterminata X a coefficienti in un anello K (integro con unità) come l'insieme delle applicazioni di $\mathbb{N}$ in K, dotato delle operazioni di somma puntuale e di prodotto alla Cauchy. Useremo la notazione $K[\![X]\!]$ per indicare questo anello, e la notazione "funzionale" $f(X)=\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i$ per i suoi elementi. Il prodotto alla Cauchy si scrive allora $(\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i)(\sum_{j=0}^{\infty} b_jX^j)=\sum_{h=0}^{\infty}(\sum_{i+j=h} a_ib_j)X^h$.*

0.1.1. È chiaro dalla definizione che $K[X]\subseteq K[\![X]\!]$ in un modo canonico: i polinomi si identificano con le serie formali "finite".

0.1.2. Si osservi che la definizione di prodotto è ben posta: per trovare ogni coefficiente di un prodotto di serie, è sufficiente un numero finito di operazioni sui coefficienti delle serie di partenza.

0.2. Definizione-Teorema (Ordine). *Data $f(X)=\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i\in K[\![X]\!]$, definiamo $\mathrm{ord}_X f(X)$ il minimo intero i per cui $a_i\neq 0$; intendiamo inoltre $\mathrm{ord}_X 0=\infty$. Allora la funzione $\mathrm{ord}: K[\![X]\!]\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ gode delle seguenti proprietà:*

(1) nullità: $\mathrm{ord}_X f=\infty$ se e solo se $f=0$.

(2) moltiplicatività: $\mathrm{ord}_X(fg)=\mathrm{ord}_X f+\mathrm{ord}_X g$.

(3) ultra-supaddittività: $\mathrm{ord}_X(f+g)\geqslant\min(\mathrm{ord}_X f,\mathrm{ord}_X g)$ (e vale l'uguaglianza se $\mathrm{ord}_X f\neq\mathrm{ord}_X g$).

0.2.1. Si osservi per inciso che la parte tra parentesi segue dalle altre proprietà della funzione ord_X; infatti se $\mathrm{ord}_X f<\mathrm{ord}_X g$ e fosse $\mathrm{ord}_X(f+g)>\mathrm{ord}_X f$ avremmo $\mathrm{ord}_X f=\mathrm{ord}_X(f+g-g)\geqslant\min(\mathrm{ord}_X(f+g),\mathrm{ord}_X g)>\mathrm{ord}_X f$, assurdo.

0.2.2. Corpo delle frazioni: serie di Laurent. In particolare segue che se K è integro, allora $K[\![X]\!]$ è integro, ed indicheremo con $K(\!(X)\!)$ il suo corpo dei quozienti. I suoi elementi sono chiamati serie (formali) di Laurent.

In tal caso, come si fa per i polinomi, useremo se necessario l'ovvia estensione ricorsiva della definizione di serie formali a più variabili, ponendo: $K[\![X_1,\dots,X_n]\!]=K[\![X_1,\dots,X_{n-1}]\!][\![X_n]\!]$, ma si faccia attenzione al fatto che $K(\!(X_1,\dots,X_n)\!)$ (corpo quoziente di $K[\![X_1,\dots,X_n]\!]$) e $K(\!(X_1,\dots,X_{n-1})\!)(\!(X_n)\!)$ non coincidono (si vede facilmente già per due variabili che il primo è contenuto nel secondo, ma quest'ultimo è decisamente più grande: farsi degli esempi).

0.2.3. Si verifica quasi immediatamente che un elemento $f(X)$ di $K[\![X]\!]$ è invertibile se e solo se il suo termine noto è invertibile in K (diverso da zero se K è un corpo). Supponiamo d'ora in poi che K sia un corpo; allora la condizione vale se e solo se $f(X)$ non è divisibile per X, o anche se e solo se $\mathrm{ord}_X f(X)=0$. Infatti il sistema lineare (con infinite equazioni) da risolvere per trovare un inverso